Université Joseph Fourier
MAT233 Fonction de plusieurs variables
2013-2014

Feuille d'exercices 6

Exercice 1 Pour tout entier $d \geqslant 1$ et tout $r \geqslant 0$, on désigne par $B_d(r)$ la boule ouverte de rayon r dans $\mathbb{R}^d$ centrée en 0, définie comme

$$B_d(r) := \{(x_1, \ldots, x_d) \mid x_1^2 + \cdots + x_d^2 < r^2\}.$$

1) Montrer que $\mathbb{1}_{B_d(r)} \in L^1(\mathbb{R}^d)$.
   Solution. L'enemble $B_d(r)$ est un ouvert borné dans $\mathbb{R}^d$, donc $\mathbb{1}_{B_d(r)}$ est intégrable.
2) Pour tout élément $P \in \mathbb{R}^d$, soit $B_d(P, r)$ l'ensemble

$$\{P + Q \mid Q \in B_d(r)\}.$$

   Montrer que $\mathbb{1}_{B_d(P,r)} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{B_d(P,r)}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{B_d(r)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Solution. Par définition, on a $\mathbb{1}_{B_d(P,r)} = \tau_{-P}\mathbb{1}_{B_d(r)}$. D'après un résultat de la séance 9 du cours, on obtient $\mathbb{1}_{B_d(P,r)} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ainsi que l'égalité souhaitée.
3) On désigne par $V_d(r)$ le volume de $B_d(r)$, défini comme

$$V_d(r) := \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{B_d(r)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Montrer que $V_d(r) = r^d V_d(1)$.
   Solution. Soit $A = rI \in M_{d\times d}(\mathbb{R})$, où I est la matrice d'identité. On a dét $(A) = r^d$. En outre, on a $\mathbb{1}_{B_d(r)} \circ A = \mathbb{1}_{B_d(1)}$. Donc

$$V_d(1) = \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbb{1}_{B_d(r)} \circ A)(x)\,\mathrm{d}x = |\mathrm{d\acute{e}t}\,A|^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{B_d(r)}(x)\,\mathrm{d}x = r^{-d} V_d(r).$$

4) En utilisant le théorème de Fubini, montrer que

$$V_d(1) = \int_{-1}^{1} V_{d-1}(\sqrt{1-t^2})\,\mathrm{d}t$$

   Solution. D'après le théorème de Fubini, on a

$$V_d(1) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \mathbb{1}_{t^2 + \|\vec{x}\|_{\ell^2}^2 \leqslant 1}\,\mathrm{d}\vec{x}\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \mathbb{1}_{\|\vec{x}\|_{\ell^2} \leqslant \sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}\vec{x}\mathrm{d}t.$$

   Comme

$$V_{d-1}(r) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \mathbb{1}_{\|\vec{x}\|_{\ell^2} \leqslant r}\,\mathrm{d}\vec{x},$$

   on obtient le résultat souhaité.

5) En effectuant un changement de variables, montrer que

$$V_d(1) = V_{d-1}(1) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\theta)^d \, \mathrm{d}\theta.$$

Solution. Par le changement de variable $t = \sin\theta$ pour $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$, on obtient

$$V_d(1) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} V_{d-1}(\cos\theta)\cos\theta \, \mathrm{d}\theta = V_{d-1}(1) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos\theta)^d \, \mathrm{d}\theta,$$

où la seconde égalité résulte de la question 3)

6) Déterminer les valeurs de $V_1(1)$, $V_2(1)$ et $V_3(1)$.
Solution. Par définition,

$$V_1(1) = \int_{-1}^{1} 1 \, \mathrm{d}t = 2.$$

D'après la question précédente,

$$V_2(1) = V_1(1) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\theta)^2 \, \mathrm{d}\theta = V_1(1) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(2\theta)+1}{2} \, \mathrm{d}\theta = \pi.$$

$$V_3(1) = V_2(1) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\theta)^3 \, \mathrm{d}\theta = \pi \int_{-1}^{1} (1 - t^2) \, \mathrm{d}t = \frac{4\pi}{3}.$$

Exercice 2 Soit E la fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$E(x) = \begin{cases} e^{1/x}, & x < 0, \\ 0, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

1) Montrer que, si P est un polynôme, alors on a

$$\lim_{x \to 0} P(1/x)E(x) = 0.$$

Solution. Il suffit de vérifier que

$$\lim_{x \to 0-} P(1/x)E(x) = 0.$$

Par le changement de variables $y = -1/x$, cela revient à la relation

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{P(y)}{e^y} = 0,$$

qui est un résultat démontré dans le cours de L1.

2) En déduire que la fonction E est de classe C^∞.
Solution. La restriction de la fonction E sur l'ouvert $\mathbb{R} \setminus 0$ est de classe C^∞ car elle est identiquement nulle sur $]0, +\infty[$ et s'écrit sur $]-\infty, 0[$ comme la composition

de deux fonctions de classes C^∞. En outre, pour tout entier $n \geqslant 0$, il existe un polynôme P_n tel que

$$E^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n(1/x)E(x), & x < 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

On peut montrer ce résultat par récurrence sur n, et les polynômes P_n sont donnés par la formule de récurrence

$$P_0(X) = 1, \quad P_{n+1}(X) = -X^2(P_n'(X) + P_n(X)).$$

D'après la question précédente, on obtient

$$\lim_{x\to 0} E^{(n)}(x) = 0 \ \text{ et } \lim_{x\to 0} E^{(n)}(x)/x = 0.$$

Cela montre (par récurrence sur n) que $E^{(n)}$ est différentiable en 0 et $E^{(n)'}(0) = 0$. Par conséquent, la fonction E est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

3) Soient $a < b$ deux nombres réels. Montrer que $F(x) = E(a-x)E(x-b)$ $(x \in \mathbb{R})$ est une fonction de classe C^∞ et à support dans $[a, b]$.
Solution. La fonction E est identiquement nulle sur $[0, +\infty[$. Pour que $F(x)$ soit non-nul, il faut que $a - x < 0$ et $x - b < 0$. Donc

$$\{x \mid F(x) \neq 0\} \subset]a, b[$$

En outre, pour tout $x \in]a, b[$, on a effectivement $E(a - x) > 0$ et $E(x - b) > 0$. On obtient donc $\mathrm{supp}(F) = [a, b]$.

4) Montrer que la fonction $H : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ définie comme

$$H(x_1, \ldots, x_d) = E(x_1^2 + \cdots + x_d^2 - 1)$$

est de classe C^∞ et est à support compact.
Solution. La fonction H est la composition de deux fonctions $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $(x_1, \ldots, x_d) \mapsto \|(x_1, \ldots, x_d)\|_{\ell^2}^2 - 1$ de $\mathbb{R}^d$ vers $\mathbb{R}$, donc est aussi de classe C^∞. En outre, $H(\vec{x}) \neq 0$ si et seulement si $\|\vec{x}\|_{\ell^2}^2 < 1$. Donc $\mathrm{supp}(H) = \overline{B}(0; 1)$ est borné. La fonction est donc à support compact.

Exercice 3 On désigne par $C_c^\infty(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions sur $\mathbb{R}$ qui sont de classe C^∞ et à support compact. Le but de cet exercice est de montrer que $C_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$. On fixe une fonction positive $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}} \chi(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

1) Pour toutes fonctions $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit $\varphi * f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$(\varphi * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x - y) f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Montrer que $\varphi * f$ est bien définie et est une fonction de classe C^∞. En outre, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $(\varphi * f)^{(n)} = \varphi^{(n)} * f$.

Solution. Montrons d'abord que $\varphi * f$ est une fonction continue. Considérons la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui envoie (x, y) en $\varphi(x-y)f(y)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $y \mapsto \varphi(x-y)$ est continue et à support compact, donc appartient à $L^1(\mathbb{R})$ et est bornée. On en déduit que la fonction $y \mapsto \varphi(x-y)f(y)$ est intégrable. La fonction $\varphi * f$ est donc bien définie. En outre, pour tout $y \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $x \mapsto F(x, y)$ est continue, et il existe une constante C (on peut choisir $C = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)|$) telle que $|F(x, y)| \leqslant C|f(y)|$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. D'après le théorème de continuité sous signe intégrale, on obtient que la fonction $\varphi * f$ est continue.

Comme φ est une fonction de classe C^∞ et à support compact, il en est de même de toutes ses dérivées $\varphi^{(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$. D'après le raisonnement précédent, on résulte du théorème de différentiabilité sous signe intégrale que $\varphi * f$ est n fois dérivable pour tout n, et que $(\varphi * f)^{(n)} = \varphi^{(n)} * f$.

2) Montrer que, si $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ et si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est à support compact, alors $\varphi * f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.
Solution. D'après la question précédente, il suffit de vérifier que le support de $\varphi * f$ est borné. Soit $D_1 = [a_1, b_1]$ et $D_2 = [a_2, b_2]$ deux intervalles fermés et bornés dans $\mathbb{R}$ tels que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset D_1$ et $\mathrm{supp}(f) \subset D_2$. On a $F(x, y) = 0$ si $y \notin D_2$ ou si $x - y \notin D_1$. Par conséquent, $F(x, y)$ est identiquement nulle dès que $x \notin D_1 + D_2 = [a_1 + a_2, b_1 + b_2]$. Par conséquent, $\varphi * f$ est aussi à support compact.

3) Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit $\chi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ définie comme $\chi_n(x) = n\chi(nx)$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Solution. On effectue un changement de variable $y = nx$ pour obtenir

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} n\chi(nx)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \chi(y)\,\mathrm{d}y = 1.$$

4) Soit f une fonction continue à support compact sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit $f_n = \chi_n * f$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, autrement dit,

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

En déduire que $C_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $C_c(\mathbb{R})$ relativement à la norme $\|.\|_{\sup}$, définie comme $\|f\|_{\sup} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.
Solution. D'abord on a

$$f_n(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_n(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \chi_n(z)f(x-z)\,\mathrm{d}z,$$

où on a effectué un changement de variables $z = x-y$. D'après la question précédente, on a

$$f_n(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_n(y)(f(x-y) - f(x))\,\mathrm{d}y.$$

Soit $r > 0$ un nombre réel tel que $\mathrm{supp}(\chi) \subset [-r, r]$. Par la définition de χ_n, on obtient que $\chi_n(y) = 0$ dès que $|y| > r/n$. Par conséquent,

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} \chi_n(y)|f(x-y) - f(x)| \leqslant \sup_{|z-x|\leqslant r/n} |f(z) - f(x)| \int_{\mathbb{R}} \chi_n(y)\,\mathrm{d}y$$
$$= \sup_{|z-x|\leqslant r/n} |f(z) - f(x)|.$$

Comme f est continue et à support compact, elle est uniformément continue, donc

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{\sup} \leqslant \lim_{n\to+\infty} \sup_{\substack{(x,z)\in\mathbb{R}^2 \\ |z-x|\leqslant r/n}} |f(z) - f(x)| = 0.$$

Enfin, d'après la question 2), chaque fonction f_n appartient à $C_c^\infty(\mathbb{R})$. Le résultat est donc démontré.

5) Soit g une fonction dans $L^1(\mathbb{R})$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit $g_n = \chi_n * g$. Montrer que $g_n \in L^1(\mathbb{R})$ et que
$$\lim_{n\to+\infty} \|g_n - g\|_{L^1} = 0.$$
En déduire que $C_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$ pour la semi-norme $\|.\|_{L^1}$.
Solution. La fonction $|g_n|$ est continue, donc elle s'ecrit comme une limite croissante de fonctions continues à support compact. On peut donc calculer

$$\int_{\mathbb{R}} |g_n(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \chi_n(y) g(x-y)\,\mathrm{dy} \right| \mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \chi_n(y)|g(x-y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \chi_n(y) \int_{\mathbb{R}} |g(x-y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \|g\|_{L^1}.$$

On obtient donc $g_n \in L^1(\mathbb{R})$. En outre, comme toute fonction de la forme $\mathbb{1}_{]a,b]}$ s'écrit comme la limite d'une suite de fonctions dans $C_c(\mathbb{R})$, on obtient que l'espace $C_c(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe alors une fonction $h \in C_c(\mathbb{R})$ telle que $\|h - g\|_{L^1} \leqslant \varepsilon$. Un calcul direct montre que

$$\|\chi_n * g - \chi_n * h\|_{L_1} \leqslant \|g - h\|_{L^1} \leqslant \varepsilon$$

Enfin, comme $(\chi_n * h)_{n\in\mathbb{N}}$ est à support uniformément borné et converge uniformément vers h (cf. la question 4)), on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \|\chi_n * h - h\|_{L_1} = 0.$$

Donc
$$\limsup_{n\to+\infty} \|\chi_n * g - g\|_{L^1} \leqslant 2\varepsilon.$$
Comme ε est arbitraire, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \|\chi_n * g - g\|_{L^1} = 0.$$

En particulier, $C_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $C_c(\mathbb{R})$ pour la semi-norme $\|.\|_{L^1}$ et donc dense dans $L^1(\mathbb{R})$.