Université Joseph Fourier
MAT233 Fonction de plusieurs variables
2013-2014

Feuille d'exercices 7

Exercice 1 1) Déterminer la courbure de la courbe paramétrée $\gamma(t) = (r\cos(t), r\sin(t))$, où $t \in \mathbb{R}$.

2) Calculer la longueur de l'astroïde $\gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (a\cos^3 t, a\sin^3 t)$.

3) Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (x(t), y(t))$ une courbe paramétrée régulière et de classe. Déterminer la courbure $\kappa(t)$ au point $\gamma(t)$ en fonction de x, y et de leurs dérivées. Appliquer votre résultat à la cycloïde $t \mapsto (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$, $a > 0$ pour déterminer la courbure de la courbe en chacun de ses points réguliers.

4) Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe régulière. Soit $(\rho(t), \theta(t))$ la paramétrisation polaires de γ, autrement dit, $\gamma(t) = (\rho(t)\cos\theta(t), \rho(t)\sin\theta(t))$. On suppose que ρ et θ sont de classe C^2. Déterminer la courbure $\kappa(t)$ au point de paramètre t, en fonction de ρ, θ et de leurs dérivées. Appliquer votre résultat à la cardioïde polaire $\rho = a(1 + \cos\theta)$ $(a \neq 0)$.

5) Donner une paramétrisation de l'ellipse définie par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a > 0,\ b > 0.$$

Déterminer la courbure de cette courbe.

6) Calculer la longueur de la cardioïde polaire $\rho = a(1 + \cos\theta)$ avec $a > 0$ fixé.

Exercice 2 Pour toute fonction f à valeurs réelles de classe C^2 définie sur un ouvert U du plan $\mathbb{R}^2$, on désigne par Δf le *laplacien* de f, défini comme :

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).$$

On dit que la fonction f est *harmonique* si $\Delta f = 0$. Dans cette partie, on munit le plan $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne usuelle $\|.\|$. On a

$$\|(x, y)\| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1) Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} \to]0, +\infty[$ la fonction définie comme $\varphi(x, y) = \|(x, y)\|$. Montrer que $\partial\varphi/\partial x = x/\varphi$ et $\partial\varphi/\partial y = y/\varphi$.

2) Montrer que $\log \circ \varphi$ est une fonction harmonique sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Dans la suite, on fixe une fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ qui est harmonique. Pour tout $\varepsilon > 0$, on désigne par $f_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction qui envoie (x, y) en $f(x, y) + \varepsilon(x^2 + y^2)$. Pour tout $r > 0$, soient

$$D_r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \|(x, y)\| \leqslant r\} \quad \text{et} \quad C_r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \|(x, y)\| = r\}.$$

On désigne par $\gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée telle que $\gamma_r(t) = (r\cos(t), r\sin(t))$.

3) Montrer que la restriction de f_ε à D_r atteint son maximum en un point $\theta_{\varepsilon,r}$.

4) Montrer que, si $\theta_{\varepsilon,r} \notin C_r$, alors on a simultanément

$$\frac{\partial^2 f_\varepsilon}{\partial x^2}(\theta_{\varepsilon,r}) \leqslant 0, \quad \frac{\partial^2 f_\varepsilon}{\partial y^2}(\theta_{\varepsilon,r}) \leqslant 0.$$

En déduire que $\theta_{\varepsilon,r}$ appartient nécessairement à C_r. On peut calculer le laplacien de la fonction f_ε.

5) Montrer que la restriction de la fonction f à D_r atteint son maximum en un point de C_r. En déduire que, si deux fonctions harmoniques sur $\mathbb{R}$ sont égales le long du cercle C_r, alors elle sont égales dans le disque D_r.

6) On définit une fonction F sur $[0,+\infty[$ comme

$$F(r) = \int_0^{2\pi} f(r\cos(t), r\sin(t))\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que cette fonction est bien définie et est continue sur $[0,+\infty[$.

7) Montre que, si $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1, alors on a

$$\int_0^{2\pi} h(\gamma_r(t))\sin(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{r}\int_{D_r} \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}(x,y),$$
$$\int_0^{2\pi} h(\gamma_r(t))\cos(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{r}\int_{D_r} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}(x,y).$$

On peut par exemple transformer l'intégrale double en des intégrales successives.

8) Montrer que la restrcition de F à $]0,+\infty[$ est dérivable et montrer que sa dérivée est égale à 0. On peut appliquer les résultats obtenu dans la question précédente.

9) Montrer que la fonction f est intégrable sur le disque D_r et on a

$$\int_{D_r} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \pi r^2 f(0,0).$$