Université Joseph Fourier
MAT233 Fonction de plusieurs variables
2013-2014

Feuille d'exercices 8

On utilise les expressions x, y pour désigner les coordonnées d'un vecteur général dans $\mathbb{R}^2$. Rappelons que $\{\mathrm{d}x, \mathrm{d}y\}$ désigne la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1 Soit $p \geqslant 0$ un entier. Si U est un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^2$, on appelle 1-*forme différentielle* de classe C^p sur U toute application $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathbb{R}^2$ vers $C^p(U)$. On désigne par $\Omega^1(U, C^p)$ l'ensemble des 1-formes différentielles de classe C^p sur U.

1) Montrer que toute 1-forme différentielle α de classe C^p sur U s'écrit de façon unique sous la forme $\alpha = f\mathrm{d}x + g\mathrm{d}y$, où f et g sont des fonctions dans $C^p(U)$ i.e. que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a $\alpha(x, y) = f\mathrm{d}x(x, y) + g\mathrm{d}y(x, y)$.
2) Soit F une fonction de classe C^{p+1} sur U, montrer que la différentielle de F (que l'on notera $\mathrm{d}F$ dans la suite) est une 1-forme différentielle de classe C^p sur U.
3) Vérifier la formule de Lebniz : pour tout couple (F, G) de fonctions dans $C^{p+1}(U)$, on a
$$\mathrm{d}(FG) = F\mathrm{d}G + G\mathrm{d}F.$$
4) Si $\alpha = f_1\mathrm{d}x + g_1\mathrm{d}y$ et $\beta = f_2\mathrm{d}x + g_2\mathrm{d}y$ sont deux 1-forme de classe C^p sur U, on définit leur produit extérieur comme
$$\alpha \wedge \beta := f_1 g_2 - g_1 f_2 \in C^p(U).$$
Montrer les relations suivantes :
$$\forall\, \alpha, \beta \in \Omega^1(U, C^p), \quad \alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha,\ \alpha \wedge \alpha = 0.$$
5) Si $\alpha = f\mathrm{d}x + g\mathrm{d}y$ est une 1-forme différentielle de classe C^{p+1} sur U, où $p \geqslant 1$, on définit $\mathrm{d}\alpha := \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}g \wedge \mathrm{d}y \in C^p(U)$. Montrer que, pour toute fonction $F \in C^{p+2}(U)$, on a $\mathrm{d}(\mathrm{d}F) = 0$.

Exercice 2 Soit U un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^2$. Si $\gamma : [a, b] \to U$ est une courbe paramétrée régulière et si $\alpha \in \Omega^1(U, C^0)$, on définit
$$\int_\gamma \alpha := \int_a^b \alpha(\gamma(t))(\gamma'(t))\,\mathrm{d}t.$$
i.e. si $\alpha = f\mathrm{d}x + g\mathrm{d}y$ alors $\int_\gamma \alpha := \int_a^b \langle (f(\gamma(t)), g(\gamma(t))), \gamma'(t)\rangle\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que la valeur de $\int_\gamma \alpha$ est invariante à signe près sous changement de paramétrisation régulier. Que commentez-vous le problème de signe dans ce résultat.
2) Soient φ et ψ deux fonctions de classe C^1 définies sur un intervalle fermé $[a, b]$ où $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On suppose que $\varphi(a) = \psi(a)$, $\varphi(b) = \psi(b)$ et $\varphi(t) < \psi(t)$ pour tout $t \in]a, b[$. Soient γ_φ et γ_ψ deux courbes paramétrées par $[a, b]$ telles que
$$\gamma_\varphi(t) = (t, \varphi(t)), \quad \gamma_\psi(t) = (t, \psi(t)).$$

Montrer que, si α est une 1-forme différentielle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui est de la forme $\alpha = f\mathrm{d}x$ avec $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, alors on a

$$\int_{\gamma_\varphi} \alpha - \int_{\gamma_\psi} \alpha = \int_D \mathrm{d}\alpha,$$

où

$$D = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [a, b],\ \varphi(t) \leqslant y \leqslant \psi(t)\},$$

et $\int_D \mathrm{d}\alpha$ désigne l'intégrale de la fonction $\mathbb{1}_D\, \mathrm{d}\alpha$.

3) Montrer que, si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ est une courbe paramétrée régulière fermée (c'est-à-dire que $\gamma(a) = \gamma(b)$ et la restriction de γ à $[a, b[$ est injective), alors pour toute 1-forme différentiable α de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d$, on a

$$\int_\gamma \alpha = \pm \int_{D_\gamma} \mathrm{d}\alpha,$$

où D_γ désigne le domaine entouré par la courbe γ. Relier le signe dans la formule à l'orientation de la courbe paramétrée γ.

4) En utilisant le résultat de la question précédente, calculer l'aire de l'ellipsoïde

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\},$$

où a et b sont des nombres strictement positifs.