Université Joseph Fourier
MAT233 Fonction de plusieurs variables
2013-2014

Feuille d'exercices 9

Exercice 1 On considère l'équation différentielle suivante :

$$x''(t) + e^t x(t) = 0. \tag{1}$$

On désigne par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de cette équation.

1) Transformer l'équation (3) en une équation différentielle d'ordre 1 dans $\mathbb{R}^2$.
2) Montrer que, s'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(t_0) = f'(t_0) = 0$, alors $f(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
3) Montrer que, si f n'est pas identiquement nulle, alors pour tout point de zéro t de la fonction f (c'est-à-dire que $f(t) = 0$), il existe $\varepsilon > 0$ tel que la fonction f ne s'annule pas dans l'intervalle ouvert $]t, t+\varepsilon[$.

Dans la suite, on fixe deux nombres réels α et β tels que $\alpha < \beta$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation différentelle suivante

$$x''(t) + e^\alpha x(t) = 0. \tag{2}$$

On suppose que la fonction g s'annule en les points α et β, et est strictement positive sur l'intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$. On définit le wronskien de f et g comme

$$W(t) = \text{dét} \begin{pmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

4) Montrer que $g'(\alpha) \geqslant 0$ et $g'(\beta) \leqslant 0$.
5) Montrer que la fonction f ne peut pas être strictement positive en tout point de l'intervalle $]\alpha, \beta[$. On peut étudier les variations de la fonction W.
6) Montrer que la fonction f ne peut pas être strictement négative en tout point de l'intervalle $]\alpha, \beta[$.
7) En déduire que, entre deux points de zéro consécutifs de la fonction g on trouve au moins un point de zéro de la fonction f.
8) Montre que, pour tout $s \in \mathbb{R}$, la fonction $\varphi_{s,\alpha}(t) = \sin(s + e^{\alpha/2} t)$ est une solution de l'équation (4).
9) En déduire que, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, la fonction f admet au moins un point de zéro dans l'intervalle $]\tau, \tau + \pi e^{-\tau/2}[$.
10) On suppose que f n'est pas identiquement nulle. Montrer que, si $\alpha < \beta$ sont deux points de zéros consécutifs de f, alors on a

$$\pi e^{-\beta/2} \leqslant \beta - \alpha \leqslant \pi e^{-\alpha/2}.$$

Pour la deuxième inégalité, on peut utiliser le résultat de la question précédente ; pour la première inégalité, on peut étudier l'équation différentielle $x''(t)+e^\beta x(t) = 0$.

Exercice 2 On considère l'équation différentielle

$$x' = Ax$$

dans $\mathbb{R}^2$, où A est la matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

où λ et a sont des nombres réels. Soient en outre I la matrice d'identité et $N = A - \lambda I$.

1) Montrer que $N^2 = 0$.

2) En déduire que $A^n = \lambda^n I + n\lambda^{n-1} N$.

3) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & ate^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

4) Déterminer l'espace des solutions de l'équation différentielle.

On considère l'équation différentielle suivante :

$$x''(t) + e^t x(t) = 0. \tag{3}$$

On désigne par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de cette équation.

1) Transformer l'équation (3) en une équation différentielle d'ordre 1 dans $\mathbb{R}^2$.
Réponse : On pose $y(t) = x'(t)$. L'équation (3) peut s'écrire comme $y'(t)+e^t x(t) = 0$. D'où le vecteur de fonctions $(x(t), y(t))$ vérifie l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -e^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

2) Montrer que, s'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(t_0) = f'(t_0) = 0$, alors $f(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Énoncer le résultat du cours que vous utilisez.
Réponse : Il s'avère que (f, f') est une solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 obtenue dans la question précédente. D'après le résultat (6) de l'appendice (ou le théorème 13.6 du cours), on obtient que $f(t) = f'(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ dès que $f(t_0) = f'(t_0) = 0$ car l'application de l'ensemble des solutions de cette équation différentielle vers $\mathbb{R}^2$ qui envoie toute solution $(x(t), y(t))$ $(t \in \mathbb{R})$ en $(x(t_0), y(t_0))$ est une bijection linéaire.

3) Montrer que, si f n'est pas identiquement nulle, alors pour tout point de zéro t de la fonction f (c'est-à-dire que $f(t) = 0$), il existe $\varepsilon > 0$ tel que la fonction f ne s'annule pas dans l'intervalle ouvert $]t, t+\varepsilon[$.
Réponse : On raisonne par l'absurde. Si la fonction f s'annule en tout intervalle de la forme $]t, t+\varepsilon[$, on peut alors construire une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ de points de zéros de f telle que $a_n > t$ pour tout n et que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = t$. On obtient alors

$$f'(t) = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(a_n) - f(t)}{a_n - t} = 0$$

On en déduire que f est identiquement nulle (d'après la question précédente). Cela est absurde.

Dans la suite, on fixe deux nombres réels α et β tels que $\alpha < \beta$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation différentelle suivante

$$x''(t) + e^\alpha x(t) = 0. \tag{4}$$

On suppose que la fonction g s'annule en les points α et β, et est strictement positive sur l'intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$. On définit le wronskien de f et g comme

$$W(t) = \text{dét} \begin{pmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

4) Montrer que $g'(\alpha) \geqslant 0$ et $g'(\beta) \leqslant 0$.
Réponse : Comme g est strictement positive sur $]\alpha, \beta[$ et est nulle en α et β, on a

$$g'(\alpha) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{g(\alpha+\varepsilon) - g(\alpha)}{\varepsilon} \geqslant 0, \quad g'(\beta) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{g(\beta-\varepsilon) - g(\beta)}{-\varepsilon} \leqslant 0.$$

5) Montrer que la fonction f ne peut pas être strictement positive en tout point de l'intervalle $]\alpha, \beta[$. On peut étudier les variations de la fonction W.
Réponse : On a $W(t) = f(t)g'(t) - g(t)f'(t)$, d'où

$$W'(t) = f(t)g''(t) - g(t)f''(t) = -f(t)e^{\alpha}g(t) + g(t)e^{t}f(t) = f(t)g(t)(e^{t} - e^{\alpha}),$$

où la deuxième égalité provient des équations différentielles (3) et (4). Si la fonction f est strictement positive sur $]\alpha, \beta[$, alors W' est strictement positive sur $]\alpha, \beta[$ et donc W est strictement croissante sur $[\alpha, \beta]$. En particulier, on a $W(\beta) > W(\alpha)$. Cependant, on a $W(\beta) = f(\beta)g'(\beta) \leqslant 0$ tandis que $W(\alpha) = f(\alpha)g'(\alpha) \geqslant 0$ (par la continuité de f et la positivité de f sur $]\alpha, \beta[$, on a $f(\alpha) \geqslant 0$ et $f(\beta) \geqslant 0$). Cela est absurde.

6) Montrer que la fonction f ne peut pas être strictement négative en tout point de l'intervalle $]\alpha, \beta[$.
Réponse : Si f est strictement négative sur $]\alpha, \beta[$ alors la fonction W est strictement décroissante sur $]\alpha, \beta[$. Cependant, on a $W(\alpha) = f(\alpha)g'(\alpha) \leqslant 0$ et $W(\beta) = f(\beta)g'(\beta) \geqslant 0$. Cela est absurde.

7) En déduire que, entre deux points de zéro consécutifs de la fonction g on trouve au moins un point de zéro de la fonction f.
Réponse : Entre deux points de zéro consécutifs $\alpha < \beta$, la fonction g ne change pas de signe (puisqu'elle est continue). Elle est donc ou bien strictement positive ou bien strictement négative. Comme les fonctions g et $-g$ sont toutes les deux des solutions de l'équation (4), on peut suppose g strictement positive sur $]\alpha, \beta[$ (quitte à remplacer éventuellement g par $-g$). Comme la fonction f est continue, si f n'est pas de point de zéro dans $]\alpha, \beta[$, alors elle est ou bien strictement positive ou bien strictement négative sur $]\alpha, \beta[$ (théorème des valeurs intermédiaires). Cela n'est pas possible compte tenu des deux questions précédentes.

8) Montre que, pour tout $s \in \mathbb{R}$, la fonction $\varphi_{s,\alpha}(t) = \sin(s + e^{\alpha/2}t)$ est une solution de l'équation (4).
Réponse : On vérifie que

$$\varphi'_{s,\alpha}(t) = e^{\alpha/2}\cos(s + e^{\alpha/2}t) \text{ et } \varphi''_{s,\alpha}(t) = -e^{\alpha}\sin(s + e^{\alpha/2}t) = -e^{\alpha}\varphi_{s,\alpha}(t).$$

Donc $\varphi_{s,\alpha}$ est une solution de l'équation (4).

9) En déduire que, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, la fonction f admet au moins un point de zéro dans l'intervalle $]\tau, \tau + \pi e^{-\tau/2}[$.
Réponse : Considérons la fonction $\varphi_{s,\tau}(t)$ avec $s = -e^{\tau/2}\tau$. C'est une solution de l'équation (4) avec $\alpha = \tau$. Les points τ et $\tau + \pi e^{-\tau/2}$ sont deux points de zéro consécutifs de la fonction $\varphi_{s,\tau}$. On en déduit que la fonction f admet au moins un point de zéro dans $]\tau, \tau + \pi e^{-\tau/2}[$, d'après la question **7.**.

10) On suppose que f n'est pas identiquement nulle. Montrer que, si $\alpha < \beta$ sont deux points de zéros consécutifs de f, alors on a

$$\pi e^{-\beta/2} \leqslant \beta - \alpha \leqslant \pi e^{-\alpha/2}.$$

Pour la deuxième inégalité, on peut utiliser le résultat de la question précédente ; pour la première inégalité, on peut étudier l'équation différentielle $x''(t)+e^{\beta}x(t) = 0$.

Réponse : D'après la question précédente, dans l'intervalle $]\alpha, \alpha + \pi e^{-\alpha/2}[$ il y a un point de zéro de la fonction f. Donc $\beta < \alpha + \pi e^{-\alpha/2}$ et $\beta - \alpha < \pi e^{-\alpha/2}$, d'où la deuxième inégalité.

Pour montrer la première inégalité, on considère une solution h de l'équation $x''(t) + e^{\beta}x(t) = 0$ qui s'annule en β et $\beta - \pi e^{-\beta/2}$ et est strictement positive sur l'intervalle ouvert $I =]\beta - \pi e^{-\beta/2}, \beta[$. On peut prendre $h(t) = -\sin(e^{\beta/2}t - e^{\beta/2}\beta)$. Le wronskien de f et h s'écrit comme

$$U(t) = f(t)h'(t) - f'(t)h(t),$$

d'où $U'(t) = f(t)h(t)(e^t - e^{\beta})$. Si la fonction f possède un point dans I, on désigne par γ le plus grand point de zéro de f dans l'intervalle I. La fonction f est non-nul (et ne change pas de signe) sur $]\gamma, \beta[$. On suppose que $f > 0$ sur $]\gamma, \beta[$. On a $U(\beta) = 0$ et $U'(t) < 0$ pour $t \in]\gamma, \beta[$. On en déduit que $U(\gamma) = -f'(\gamma)h(\gamma) < 0$. Cela est absurde. De même on peut montrer que f ne peut pas être toujours < 0 sur $]\gamma, \beta[$. Par conséquent, f n'a pas de point de zéro sur l'intervalle I.