Séance 1 Rappels sur l'analyse sur $\mathbb{R}$ (I)

Notations : $\forall$: pour tout $\exists$ il existe

$\leqslant$: relation d'ordre usuelle sur $\mathbb{R}$

On rajoute formellement deux éléments $+\infty$ et $-\infty$ dans $\mathbb{R}$. $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

On convient que

<1> $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $-\infty < x < +\infty$

<2> $(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$ $\quad -(\pm\infty) = \mp\infty$

<3> $\forall\ x \in \mathbb{R}$ $\quad x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = \pm\infty$

<4> $\forall\ x \in \overline{\mathbb{R}}$, $x > 0$ $\quad x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \pm\infty$

$\forall\ y \in \overline{\mathbb{R}}$, $y < 0$ $\quad y \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot y = \mp\infty$

Attention Les expressions suivantes ne sont jamais utilisées dans ce cours

$(\pm\infty) + (\mp\infty)$ $\quad 0 \cdot (\pm\infty)$ $\quad (\pm\infty) \cdot 0$

§1 bornes

Soient $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$

Si $\forall\ x \in A$, $x \leq a$, on dit que a est un majorant de A

Si $\forall\ x \in A$, $a \leq x$, on dit que a est un minorant de A

On dit que A est majoré s'il admet un majorant dans $\mathbb{R}$

On dit que A est minoré s'il admet un minorant dans $\mathbb{R}$

On dit que A est borné s'il est majoré à la fois minoré.

Exemple $[0, 1[$ est borné. $\mathbb{Q}$ n'est ni majoré ni minoré

Fait (admis)

Tout sous-ensemble A de $\overline{\mathbb{R}}$ possède un majorant (resp. minorant) qui est plus petit ou égal à (resp. plus grand ou égale à) tout majorant (resp. minorant) de A, appelé la borne supérieure (resp. borne inférieure) de A, noté comme $\sup A$ (resp. $\inf A$)

Remarque

A est majoré si et seulement si $\sup A < +\infty$

A est minoré si et seulement si $\inf A > -\infty$

Si $\sup A \in A$, on dit que A possède un maximum
Si $\inf A \in A$, on dit que A possède un minimum

<u>Exemple</u> Si $A =]0,1[$, alors $\sup A = 1$ $\inf A = 0$
Si $A = \emptyset$, alors $\sup A = -\infty$ $\inf A = +\infty$

Valeur absolue qui provient de la relation d'ordre

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

<u>Notations</u> Si I est un ensemble et $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ est une application, alors $\sup_{i\in I} f(i)$ et $\inf_{i\in I} f(i)$ désignent respectivt la borne supérieure et la borne inférieure de l'image de f.

<u>Proposition 1</u> Soit $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ une application. Alors

$$\sup_{i\in I}(-f(i)) = -\inf_{i\in I} f(i) \qquad \inf_{i\in I}(-f(i)) = -\sup_{i\in I} f(i)$$

<u>Démonstration</u> Soient $\alpha = \inf_{i\in I} f(i)$ $\beta = \sup_{i\in I} f(i)$

$\forall i \in I$, on a $\alpha \leq f(i)$ et donc $-f(i) \leq -\alpha$.

On en déduit $\sup_{i\in I}(-f(i)) \leq -\alpha = -\inf_{i\in I} f(i)$ (*)

$\forall i \in I$, on a $f(i) \leq \beta$ et donc $-\beta \leq -f(i)$

On en déduit $-\sup_{i\in I} f(i) \leq \inf_{i\in I}(-f(i))$ (**)

On applique (**) à la fonction $i \mapsto -f(i)$ pour obtenir
$-\sup_{i\in I} f(i) \leq \inf_{i\in I} f(i)$, ou de façon équivalente $\sup_{i\in I}(-f(i)) \geq -\inf_{i\in I} f(i)$

Si on combine cette inégalité avec (*), on obtient $\sup_{i\in I}(-f(i)) = -\inf_{i\in I} f(i)$

De façon similaire, on applique (*) à la fonction $i \mapsto -f(i)$ et combine l'inégalité avec (**), on obtient la deuxième égalité. #

Proposition 2 Soient I un ensemble et f, g deux applications de I vers $\overline{\mathbb{R}}$. Si pour tout $i \in I$ on a $f(i) \leqslant g(i)$, alors

$$\sup_{i\in I} f(i) \leqslant \sup_{i\in I} g(i) \qquad \inf_{i\in I} f(i) \leqslant \inf_{i\in I} g(i).$$

Preuve Soient $\alpha = \sup_{i\in I} g(i)$. $\forall i \in I$ on a $\alpha \geqslant g(i) \geqslant f(i)$

Donc α est un majorant de l'image de f. On en déduit $\sup_{i\in I} f(i) \leqslant \alpha$

Soit $\beta = \inf_{i\in I} f(i)$. $\forall i \in I$ on a $\beta \leqslant f(i) \leqslant g(i)$. Donc β est un minorant de l'image de g. Donc $\beta \leqslant \inf_{i\in I} g(i)$.

Proposition 3 Soit $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ une application. Si J est un sous-ensemble de I, alors

$$\sup_{j\in J} f(j) \leqslant \sup_{i\in I} f(i) \qquad \inf_{j\in J} f(j) \geqslant \inf_{i\in I} f(i).$$

Démonstration : $\sup_{i\in I} f(i)$ est un majorant de $f(J)$.

$\inf_{i\in I} f(i)$ est un minorant de $f(J)$.

avec I et J non-vides

Proposition 4 Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux applications.

On a
$$\sup_{i\in I} f(i) + \sup_{j\in J} g(j) = \sup_{(i,j)\in I\times J} \big(f(i) + g(j)\big) \qquad (*_1)$$

$$\inf_{i\in I} f(i) + \inf_{j\in J} g(j) = \inf_{(i,j)\in I\times J} \big(f(i) + g(j)\big)$$

Démonstration Soit $\alpha = \sup_{(i,j)\in I\times J} \big(f(i)+g(j)\big)$.

Pour tout couple $(i,j) \in I \times J$, on a $f(i) + g(j) \leqslant \sup f(I) + \sup g(J)$

Donc $\alpha \leqslant \sup_{i\in I} f(i) + \sup_{j\in J} g(j)$.

Réciproquement, pour un $i \in I$ fixé, on a $\forall j \in J$ $f(i) + g(j) \leqslant \alpha$ et $g(j) \leqslant \alpha - f(i)$.

On obtient donc $\sup_{j\in J} g(j) \leqslant \alpha - f(i)$, ou encore $\sup_{j\in J} g(j) + f(i) \leqslant \alpha$. Si $\sup_{j\in J} g(j) = +\infty$ alors $\alpha = +\infty$ également, et l'égalité $(*_1)$ est déjà vraie.

Sinon $f(i) \leqslant \alpha - \sup_{j \in J} g(j)$. Comme i est arbitraire, on obtient

$$\sup_{i\in I} f(i) \leqslant \alpha - \sup_{j\in J} g(j) \quad \text{et donc} \quad \sup_{i\in I} f(i) + \sup_{j\in J} g(j) \leqslant \alpha$$

La démonstration de la deuxième égalité est très similaire, il suffit de remplacer tous les $\leqslant$ par $\geqslant$.

__Corollaire__ Soient I un ensemble et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux applications. Alors

$$\sup_{i\in I} \left(f(i) + g(i) \right) \leqslant \left(\sup_{i\in I} f(i) \right) + \left(\sup_{i\in I} g(i) \right)$$

$$\inf_{i\in I} \left(f(i) + g(i) \right) \geqslant \left(\inf_{i\in I} f(i) \right) + \left(\inf_{i\in I} g(i) \right)$$

__Démonstration__

$$\left(\sup_{i\in I} f(i) \right) + \left(\sup_{i\in I} g(i) \right) \underset{\text{Prop 4}}{=} \sup_{(i,j)\in I^2} \left(f(i) + g(j) \right)$$

$$\underset{\text{Prop 3}}{\geqslant} \sup_{i\in I} \left(f(i) + g(i) \right) \qquad \{(i,i) \mid i \in I\} \subset I^2$$

La démonstration de la seconde inégalité est très similaire

§ 2 limite

distance : $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ soit $d(x,y) = |x-y|$

Propriétés : (1) $d(x,y) \geqslant 0$ et $d(x,y) = 0$ si et seulement si $x=0$

(2) inégalité triangulaire :

$$\forall\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$$

__Définition__ • Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $\overline{\mathbb{R}}$, On désigne par

$\limsup_{n\to+\infty} a_n$ l'élément $\inf_{N\in\mathbb{N}} \sup_{n\geqslant N} a_n$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, appelé la

$\liminf_{n\to\infty} a_n$ $\quad \sup_{N\in\mathbb{N}} \inf_{n\geqslant N} a_n$

limite supérieure / inférieure de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $d(a_n, l) < \varepsilon$ quel que soit $n \geqslant N$

• Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$. Si $\limsup_{n\to\infty} d(a_n, l) = 0$

On dit que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **convergente** et que l est la **limite** de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ noté comme $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Théorème 5 Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite $\begin{matrix}\text{croissante}\\ \text{décroissante}\end{matrix}$ dans $\mathbb{R}$ qui est $\begin{matrix}\text{majorée}\\ \text{minorée}\end{matrix}$, alors elle est convergente, et sa limite est $\begin{matrix}\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n\\ \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n\end{matrix}$

Démonstration Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et majorée.

Soit $l = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Alors on a $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq l < +\infty$.

Donc $(d(a_n, l))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive et décroissante.

Lemme Soit A un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}$. Si A est majoré, alors $\forall \varepsilon > 0$ (dans $\mathbb{R}$) il existe $a \in A$ tel que $\sup A < a + \varepsilon$.

Preuve On raisonne par absurde. Supposons l'existence d'un $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ tel que $\forall a \in A \quad \sup A \geq a + \varepsilon$. Alors $\sup A - \varepsilon$ est un majorant de A qui est strictement plus petit que $\sup A$. Cela contradit la définition de la borne supérieure. ※

Continuation: Par le lemme, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$ $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq d(a_N, l) < \varepsilon$. Comme la suite $(d(a_n, l))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on obtient $0 \leq d(a_n, l) < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$.

On obtient alors $\sup_{n\geq N} d(a_n, l) \leq \varepsilon$. On en déduit $\limsup_{n\to\infty} d(a_n, l) \leq \varepsilon$

Comme ε est arbitraire, on obtient $\limsup_{n\to\infty} d(a_n, l) = 0$.

Pour obtenir le deuxième énoncé, il suffit d'appliquer le premier énoncé à la suite $(-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ※

Remarque Le théorème montre que, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée, alors $\limsup_{n\to+\infty} a_n = \lim_{N\to+\infty} \sup_{n\geq N} a_n$ $\quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{N\to+\infty} \inf_{n\geq N} a_n$

Proposition 6 Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites dans $\mathbb{R}$. Si ces deux suites sont toutes convergentes, alors il en est de même de $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De plus, on a $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$

Démonstration Soient $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$, $\beta = \lim_{n\to\infty} b_n$

On a $|(a_n+b_n) - (\alpha+\beta)| \leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta|$

Donc $\sup_{n \geqslant N} d(a_n + b_n, \alpha+\beta) \leqslant \sup_{n \geqslant N} d(a_n, \alpha) + \sup_{n \geqslant N} d(b_n, \beta)$

Par conséquent, $\limsup_{n\to\infty} d(a_n+b_n, \alpha+\beta) \leqslant \sup_{n\geqslant N} d(a_n, \alpha) + \sup_{n \geqslant N} d(b_n, \beta)$ quel que soit $N \in \mathbb{N}$. En outre, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$\sup_{n\geqslant N} d(a_n, \alpha) < \varepsilon$ et $\sup_{n\geqslant N} d(b_n, \beta) < \varepsilon$ si N est suffisament grand

On obtient alors $\limsup_{n\to\infty} d(a_n+b_n, \alpha+\beta) \leqslant 2\varepsilon$. Comme ε est arbitraire, on obtient $\limsup_{n\to\infty} d(a_n+b_n, \alpha+\beta) = 0$.

※

<u>Notation</u> Si $N \in \mathbb{N}$, on désigne par $\mathbb{N}_{\geqslant N}$ l'ensemble des entiers naturels $\geqslant N$

<u>Théorème</u> Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}$. Les énoncés suivants sont équivalents : <1> la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente

<2> $$\lim_{N\to+\infty} \sup_{(n,m)\in\mathbb{N}_{\geqslant N}} d(a_n, a_m) = 0 \qquad (*)$$

<3> $\limsup_{n\to\infty} a_n$ et $\liminf_{n\to\infty} a_n$ sont dans $\mathbb{R}$ et <u>sont égaux</u>.

<u>Démonstration</u> <1> $\Rightarrow$ <2> On suppose que l est la limite de $(a_n)_{n\geqslant 0}$.

Pour $(n,m) \in \mathbb{N}_{\geqslant N}^2$, on a

$$|a_n - a_m| \leqslant |a_n - l| + |a_m - l| \leqslant 2 \sup_{n\geqslant N} |a_n - l|$$

On en déduit $$\sup_{(n,m)\in\mathbb{N}_{\geqslant N}^2} |a_n - a_m| \leqslant 2 \sup_{n\geqslant N} |a_n - l|$$

Par passage à la limite quand $N \to \infty$, on obtient le résultat

<2> $\Rightarrow$ <3> La condition $(*)$ montre que la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée, donc $\limsup_{n\to\infty} a_n$ et $\liminf_{n\to\infty} a_n$ sont dans $\mathbb{R}$. En outre

$$\sup_{n\geqslant N} a_n - \inf_{m\geqslant N} a_m = \sup_{(n,m)\in\mathbb{N}_{\geqslant N}^2} (a_n - a_m) \leqslant \sup_{(n,m)\in\mathbb{N}_{\geqslant N}^2} |a_n - a_m|$$

Par passage à la limite quand $N \to +\infty$, on obtient le résultat

<3> $\Rightarrow$ <1> Soit $l = \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_m$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a

$$\inf_{n\geqslant N} a_n - l \leqslant a_N - l \leqslant \sup_{n\geqslant N} a_n - l$$

Par passage à la limite quand $N \to \infty$, on obtient le résultat.