Séance 10. Courbes paramétrées

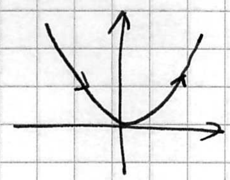
§1 Définitions

Soit I un intervalle dans $\mathbb{R}$. On appelle courbe paramétrée par I dans $\mathbb{R}^d$ (de classe C^0) toute application continue $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$.

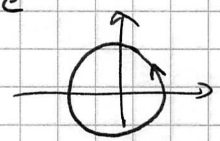
Si $n \geq 1$ est un entier, on dit qu'une courbe paramétrée $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ est de classe C^n si γ est différentiable sur I° et si $\gamma' : I^\circ \to \mathbb{R}^d$ s'étend en une courbe paramétrée de classe C^{n-1}.

γ est dite de classe C^∞ si elle est de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

<u>Exemple</u> . $\gamma(t) = (t, t^2)$ est une courbe paramétrée de classe C^∞



. $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ est une courbe paramétrée de classe C^∞



<u>Notation</u> Si $x_1, \dots, x_n$ représente les coordonnées de $\mathbb{R}^d$, on utilise $x_i^\gamma(t)$ pour représenter la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de $\gamma(t)$.
(ou $x_i(t)$ s'il n'y pas d'ambiguïté).

Si $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ est une courbe paramétrée de classe C^1, et si $t_0 \in I^\circ$, on dit que γ est régulière en t_0 si $\gamma'(t_0) \neq (0, \dots, 0)$

Dans ce cas-là la tangente de γ en t_0 est définie comme la courbe paramétrée $T_{t_0}\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d$

$$t \longmapsto \gamma(t_0) + (t - t_0)\gamma'(t_0).$$

On dit que γ est régulière si elle est régulière en tout $t_0 \in I^\circ$

§2 Changement de paramétrisation

On fixe une courbe paramétrée $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$. Si J est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi : J \to I$ est un homeomorphisme

(i.e. φ est une bijection continue, et $\varphi^{-1} : I \to J$ est aussi continue).

alors $\gamma \circ \varphi : J \to \mathbb{R}^d$ est aussi une courbe paramétrée

φ est appelée un changement de paramétrisation.

Si φ est de classe C^1 et si $\varphi'(u) \neq 0$ est vérifié pour tout $u \in J^\circ$ on dit que φ est un changement de paramétrisation régulier.

<u>Proposition</u> Soit $\varphi : J \to I$ un changement de paramétrisation régulier, alors φ^{-1} est aussi régulier

<u>Preuve</u> Soit $\psi = \varphi^{-1}$. Comme φ est différentiable sur J° on obtient que ψ est différentiable sur I°, et on a

$$\psi' = \frac{1}{\varphi' \circ \varphi^{-1}} = \frac{1}{\varphi' \circ \psi} \neq 0.$$

<u>Corollaire</u> Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée.

① Si γ est de classe C^1 et si $\varphi : J \to I$ est un changement de paramétrisation de classe C^1, alors $\gamma \circ \varphi$ est une courbe paramétrée de classe C^1

② Si γ est de classe C^1 et si $\varphi : J \to I$ est un changement de paramétrisation régulier, alors γ est régulière en $t_0 \in I^\circ$ si et seulement si $\gamma \circ \varphi$ est régulière en $\varphi^{-1}(t_0) \in J^\circ$.

<u>Démonstration</u> ① $(\gamma \circ \varphi)' = (\gamma' \circ \varphi) \cdot \varphi'$

② $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$ si et seulement si $(\gamma \circ \varphi)'(\varphi^{-1}(t_0)) = \gamma'(t_0) \cdot \varphi'(\varphi^{-1}(t_0)) \neq \vec{0}$.

§ 3 Longueur.

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée régulière de classe C^1. On fixe $t_0 \in I^\circ$ et on définit une fonction $s : I \to \mathbb{R}^d$ comme

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\|_{\ell^2} \, du$$

appelée une fonction de longueur associée à γ

On peut aussi utiliser l'expression s_{γ, t_0} pour désigner cette fonction (afin de souligner la courbe γ et le choix du point t_0.

<u>Observation</u> : s est strictement croissante, et continue, donc définit une bijection entre I et $s(I)$. En outre, on a $s'(t) = \|\gamma'(t)\|_{\ell^2}$

Donc s définit un changement de paramétrisation régulier.

<u>Proposition</u> $\gamma \circ s^{-1} : s(I) \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est une courbe paramétrée régulière

<u>Définition</u> On dit qu'une courbe paramétrée γ de classe C^1 est paramétrée par sa longueur si $\|\gamma'(t)\|_{\ell^2} = 1$ pour tout t. ($s(t) = t - t_0$

<u>Théorème</u> Si $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ est une courbe paramétrée régulière et si $s : I \to \mathbb{R}$ est une fonction de longueur associée à γ, alors $\gamma \circ s^{-1}$ est une courbe paramétrée par sa longueur.

<u>Démonstration</u> on a $(\gamma \circ s^{-1})' = (\gamma' \circ s^{-1}) \cdot (s^{-1})'$

$$= \frac{1}{s' \circ s^{-1}} \cdot \gamma' \circ s^{-1} = \frac{\gamma' \circ s^{-1}}{\|\gamma' \circ s^{-1}\|_{\ell^2}}$$

Donc $\|(\gamma \circ s^{-1})'\|_{\ell^2} = 1$.

\#

<u>Exemple</u> $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$.

$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$. $\|\gamma'(t)\|_{\ell^2} = 1$.

§ 4 Courbure :

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée de classe C^2 qui est régulière. On appelle courbure de γ la fonction

$$\kappa_\gamma : I^\circ \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{définie comme} \quad \kappa_\gamma(t) = \| (\gamma \circ s^{-1})''(s(t)) \|_{\ell^2}$$

Dans le cas où γ est paramétrée par sa longueur, on a

$$\kappa_\gamma(t) = \| \gamma''(t) \|_{\ell^2}$$

<u>Remarque</u> La définition de κ_γ ne dépend pas du choix de t_0 qui définit la fonction s. En outre, κ_γ est invariant sous changement de paramétrisation régulier.

En effet, on a $\quad s_{\gamma\circ\varphi, \varphi^{-1}(t_0)} = s_{\gamma, t_0} \circ \varphi \quad$ pour tout tel changement de paramétrisation $\varphi : J \to I$. et donc $\kappa_{\gamma\circ\varphi} = \kappa_\gamma \circ \varphi$.

<u>Théorème</u> Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée régulière. Pour tout $t \in I^\circ$, on a

$$\kappa_\gamma(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|_{\ell^2}^2} \cdot \left\| \gamma''(t) - \frac{\langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|^2} \gamma'(t) \right\|_{\ell^2}$$

<u>Démonstration</u>

$$(\gamma \circ s^{-1})'' = \left(\frac{\gamma' \circ s^{-1}}{\|\gamma' \circ s^{-1}\|} \right)' = \frac{(\gamma' \circ s^{-1})'}{\|\gamma' \circ s^{-1}\|} - \frac{\|\gamma' \circ s^{-1}\|'}{\|\gamma' \circ s^{-1}\|^2} (\gamma' \circ s^{-1})$$

$$= \frac{\gamma'' \circ s^{-1}}{\|\gamma' \circ s^{-1}\|^2} - \frac{\|\gamma' \circ s^{-1}\|'}{\|\gamma' \circ s^{-1}\|^2} (\gamma' \circ s^{-1})$$

Comme $\|\gamma' \circ s^{-1}\| = \langle \gamma' \circ s^{-1}, \gamma' \circ s^{-1} \rangle^{1/2}$, on a

$$\|\gamma' \circ s^{-1}\|' = \frac{1}{\|\gamma' \circ s^{-1}\|} \langle \gamma' \circ s^{-1}, (\gamma' \circ s^{-1})' \rangle = \frac{\langle \gamma' \circ s^{-1}, \gamma'' \circ s^{-1} \rangle}{\|\gamma' \circ s^{-1}\|^2}$$

Par conséquent, $\kappa_\gamma = \dfrac{1}{\|\gamma'\|} \left\| \gamma'' - \dfrac{\langle \gamma'', \gamma' \rangle}{\|\gamma'\|^2} \gamma' \right\|$

Exemple

① $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ est paramétrée par sa longueur

$$\gamma''(t) = (-\cos t, -\sin t) \implies \kappa_\gamma(t) = 1$$

② $\gamma(t) = (t, t^2)$

$$\gamma'(t) = (1, 2t) \qquad \gamma''(t) = (0, t)$$

$$\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle = 2t^2. \qquad \|\gamma'(t)\|^2 = 1 + 4t^2$$

$$\implies \left(\gamma'' - \frac{\langle \gamma'', \gamma' \rangle}{\|\gamma'\|^2} \gamma' \right)(t) = (0, t) - \frac{2t^2}{1+4t^2}(1, 2t)$$

$$= \left(-\frac{2t^2}{1+4t^2}, \frac{t}{1+4t^2} \right)$$

$$\implies \kappa_\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} \cdot \frac{|t|}{1+4t^2} \cdot \sqrt{1+4t^2} = \frac{|t|}{1+4t^2}.$$