Séance 11 Équations différentielles

§1

Une équation différentielle est une formule de la forme

$$(*) \qquad x'(t) = f(t, x(t)) \qquad t \in I$$

où I est un intervalle ouvert non-vide dans $\mathbb{R}$. f est une application d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^{d+1}$ vers $\mathbb{R}^d$

Une solution de l'équation $(*)$ est une courbe paramétrée dans $\mathbb{R}^d$ qui vérifie cette égalité.

On peut aussi écrire l'équation sous la forme

$$dx = f(t, x)\, dt$$

<u>Quelques exemples</u> ($d=1$)

① $x'(t) = f(t)$, où f est une fonction continue (et donc localement intégrable) sur I alors pour toute constante C, et tout $t_0 \in I$

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds + C \text{ est une solution de l'équation.}$$

② $dx = g(x)\, dt$, où g est une fonction continue et partout non-nul définie sur un intervalle ouvert J.

On note $\quad G(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{g(y)}\, dy \qquad (x_0 \in J)$

Alors $\quad dG(x) = \frac{1}{g(x)}\, dx.$

Conclusion. Si C est une constante telle que $G(x(t)) = t + C$ alors $x(t)$ est une solution de l'équation.

eg. Si $x'(t) = x(t)$.

$G(x) = \ln x$. donc $x(t) = e^{t+C}$ est une solution.

③ $dx = g(x) f(t)\, dt \qquad g$ comme dans ②. f comme dans ①

Soit $\quad G(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{g(y)}\, dy \qquad F(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds.$

on a $\quad dG(x) = dF(t)$

Si $x(t)$ vérifie la relation $G(x(t)) = F(t) + C$. alors $x(t)$ est une solution de l'équation.

On utilise (t,x) pour désigner les coordonnées dans $\mathbb{R}^2$.
(dt, dx) désigne la base duale de la base canonique.
Si U est un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^2$, on appelle 1-forme différentielle continue sur U toute application $\alpha : \mathbb{R}^2 \to C^0(U)$.
On peut écrire α sous la forme

$$\alpha = f\,dt + g\,dx \quad \text{où} \quad f, g \in C^0(U).$$

En effet $f = \alpha(e_1)$, $g = \alpha(e_2)$.
Si α est une 1-forme différentielle continue, alors $\alpha = 0$ est une équation différentielle.

<u>exemple</u> Si $F : U \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1, alors

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t}\,dt + \frac{\partial F}{\partial x}\,dx$$ est une 1-forme différentielle continue

Si α est de la forme $\alpha = dF$ avec $F \in C^1(U)$, on dit que α est une forme exacte

On dit qu'une 1-forme différentielle est de classe C^k si elle est à valeurs dans $C^k(U)$.
Si $\alpha = f\,dt + g\,dx$ est de classe C^1, on définit

$$d\alpha = -\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial t} \in C^0(U).$$

Si $d\alpha = 0$ on dit que α est une 1-forme fermée

<u>Proposition</u> Soit α une 1-forme différentielle de classe C^1.
Si α est exacte, elle est nécessairement fermée.
<u>Démonstration</u> On suppose $\alpha = dF$ avec $F \in C^2(U)$.

On a $$d\alpha = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x} = 0.$$ #

<u>Théorème</u> Soit α une 1-forme différentielle continue.
Si $\alpha = dF$ est exacte, alors pour toute fonction $x(\cdot)$

différentiable définie sur un intervalle ouvert I telle que $F(t, x(t)) = 0$. $x(\cdot)$ est une solution de l'équation $\alpha = 0$.

<u>Démonstration</u> On a $\frac{d}{dt} F(t, x(t)) = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} x'(t)$ ✠

<u>Remarque</u> On peut remplacer F par $F + C$, où C est une constante.

§ 2 Théorème d'existence locale.

On considère une équation différentielle de la forme

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

où f est une application continue d'un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ vers $\mathbb{R}^d$.

Soit Ω un ensemble muni d'une métrique dist.

On dit qu'une application $T : \Omega \to \Omega$ est une contraction s'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $0 \leq \varepsilon < 1$ tel que

$$\forall\ P, Q \in \Omega,\ \mathrm{dist}(T(P), T(Q)) \leq \varepsilon\, \mathrm{dist}(P, Q).$$

<u>Théorème</u>. On suppose que Ω est non-vide et est complet par rapport à la métrique dist (toute suite de Cauchy est convergente) alors toute contraction $T : \Omega \to \Omega$ admet un unique point fixe (i.e. $P \in \Omega$ tel que $T(P) = P$).

<u>Démonstration</u> Montrons d'abord l'unicité. Si P_1 et P_2 sont deux points fixes de T. alors $\mathrm{dist}(T(P_1), T(P_2)) = \mathrm{dist}(P_1, P_2) \leq \varepsilon\, \mathrm{dist}(P_1, P_2)$ donc $\mathrm{dist}(P_1, P_2) = 0 \Rightarrow P_1 = P_2$.

<u>Existence</u> Soit P_0 un point de Ω. Pour tout entier $n \geq 1$, soit $P_n = T^n(P_0)$. Par récurrence en n, on peut montrer que

$\mathrm{dist}(P_n, P_{n+1}) \leq \varepsilon^n\, \mathrm{dist}(P_1, P_0)$. Donc pour $n < m$, on a

$$\mathrm{dist}(P_n, P_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} \mathrm{dist}(P_k, P_{k+1}) \leq \mathrm{dist}(P_1, P_0) \sum_{k=n}^{m-1} \varepsilon^k \leq \frac{\varepsilon^n}{1-\varepsilon}\, \mathrm{dist}(P_1, P_0)$$

Donc $(P_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy qui doit converger vers un pt P

Comme T est continue, on a

$$T(P) = \lim_{n\to\infty} T(P_n) = \lim_{n\to\infty} P_{n+1} = P.$$

<u>Corollaire</u> Soit (Ω, dist) un espace métrique complet et non-vide. $T : \Omega \to \Omega$ une application. S'il existe $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ tel que T^m soit une contraction, alors T admet un unique pt fixe.

<u>Démonstration</u> Si P est un point fixe de T, il est aussi un pt fixe de T^m. l'unicité est donc démontrée. Montrons l'existence.
Soit P l'unique point fixe de T^m. on a

$$T^m(T(P)) = T^{m+1}(P) = T(T^m(P)) = T(P)$$

Donc $T(P)$ est aussi un point fixe de T^m. $\Rightarrow T(P) = P$. ☼

§3
Considérons l'équation

$$x'(t) = f(t, x(t)) \qquad (*)$$

$$f : (\underset{\text{ouvert}}{U \subset} \mathbb{R}^{d+1}) \longrightarrow \mathbb{R}^d \quad \text{continue}$$

<u>Théorème</u> On suppose qu'il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \lambda \|x - y\|$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^d$ tels que (t, x) et $(t, y) \in U$.
Alors pour tout $(t_0, x_0) \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(*)$ admette une unique solution γ sur $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ qui vérifie $\gamma(t_0) = x_0$

<u>Démonstration</u> La stratégie est de choisir un ε convenable et considérer $\Omega \subset C^0([t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon], \mathbb{R}^d)$ sous-espace ~~vectoriel~~ de fonct t.q. $\gamma(t_0) = x_0$.
C^0 est munie d'une norme $\|\gamma\| = \sup_{t \in [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]} \|\gamma(t)\|$

et la distance associée

$$\text{dist}(\gamma_1, \gamma_2) = \|\gamma_1 - \gamma_2\|.$$

L'espace Ω est complet par rapport à cette métrique (induite).
On définit $T : \Omega \to \Omega$ t.q.

$$(T\gamma)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \gamma(s))\, ds.$$

Si γ est un point fixe de T, alors on a

$$\gamma(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \gamma(s))\, ds$$

et donc $\gamma'(t) = f(t, \gamma(t))\, dt$.

<u>But</u>: Montrer que T^m est une contraction pour m suffisament grand

On a $$\| T\gamma_1(t) - T\gamma_2(t) \| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, \gamma_1(s)) - f(s, \gamma_2(s))\, ds \right\|$$
$$\leq \lambda |t - t_0| \operatorname{dist}(\gamma_1, \gamma_2)$$

car $\| f(s, \gamma_1(s)) - f(s, \gamma_2(s)) \| \leq \lambda \| \gamma_1(s) - \gamma_2(s) \| \leq \lambda \operatorname{dist}(\gamma_1, \gamma_2)$

donc $$\| T^n\gamma_1(t) - T^n\gamma_2(t) \| \leq \frac{\lambda^n}{n!} |t - t_0|^n \operatorname{dist}(\gamma_1, \gamma_2)$$

On peut raisonner par récurrence sur n

$$\| T^n\gamma_1(t) - T^n\gamma_2(t) \| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, T^{n-1}\gamma_1(s)) - f(s, T^{n-1}\gamma_2(s))\, ds \right\|$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} \lambda \cdot \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} |s - t_0|^n \operatorname{dist}(\gamma_1, \gamma_2)\, ds \right| \leq \frac{\lambda^n}{n!} |t - t_0|^n \operatorname{dist}(\gamma_1, \gamma_2)$$

Il faut que $T : \Omega \to \Omega$ soit bien défini et Ω est fermé dans C^0.

on a $$\| T\gamma(t) - x_0 \| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, \gamma(s))\, ds \right\|$$

$$\leq \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, x_0)\, ds \right\| + \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, \gamma(s)) - f(s, x_0)\, ds \right\|$$

$$\leq \varepsilon \sup_{s \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} \| f(s, x_0) \| + \varepsilon \lambda \sup_{s \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} \| \gamma(s) - x_0 \|.$$

Il suffit de choisir $R > 0$ tel que $\overline{B((t_0, x_0), R)} \subset U$.

et ε assez petit pour que

$$\varepsilon \sup_{s \in [t_0 - R, t_0 + R]} \| f(s, x_0) \| + \varepsilon \lambda R < R.$$

Alors T envoie $\gamma \in \Omega$ en une courbe dans Ω

On prend $\Omega = \left\{ \gamma : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}^d \text{ continue} \;\middle|\; \gamma(t_0) = x_0,\ \sup_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} \| \gamma(t) - x_0 \| \leq R \right\}.$