§4 Équations linéaires.

On s'intéresse aux équations de la forme

$$x'(t) = A(t)\,x(t) + \varphi(t) \qquad t \in I$$

où $A(\cdot)$ est une application continue de I vers $M_{d\times d}(\mathbb{R})$ et $\varphi(\cdot)$ est une application continue de I vers $\mathbb{R}^d$

On commence par le cas simple :

$$x' = Ax$$

où A est une matrice de taille $d\times d$.

On désigne par
$$\exp : M_{d\times d}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{d\times d}(\mathbb{R})$$
$$M \longmapsto \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} M^n$$

Norme d'opérateur sur $M_{d\times d}(\mathbb{R})$:

Si $M \in M_{d\times d}(\mathbb{R})$, on note

$$\|M\| = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^d \\ \|x\|=1}} \|Mx\|$$

$\|\cdot\|$ est une norme sur $M_{d\times d}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{d^2}$.

En outre, si M et N sont deux matrices carrés, on a $\|MN\| \leq \|M\|\cdot\|N\|$.

Donc la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} M^n$. converge dans $M_{d\times d}(\mathbb{R})$.

<u>Théorème</u> Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$, la courbe paramétrée

$$x(t) = \exp(tA)\,x_0$$

est une solution de $x'(t) = A\,x(t)$.

<u>Démonstration</u> On a $x(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} t^n A^n x_0$

C'est une série de fonctions dont le rayon de convergence est $+\infty$. On peut dériver la série terme par terme. On obtient donc

$$x'(t) = \sum_{n\geq \cancel{0}} \frac{n t^{n-1}}{n!} A^n x_0 = A \sum_{m\geq 0} \frac{t^m}{m!} A^m x_0 = A x(t).$$

On peut résoudre ensuite l'équation inhomogène

$$x'(t) = Ax(t) + \varphi(t)$$

En effet, si x est une application dérivable d'un intervalle ouvert vers $\mathbb{R}^d$, alors

$$\left(\exp(-tA)\, x(t)\right)' = \exp(-tA)\left(x'(t) - Ax(t)\right).$$

On effectue le changement de variables

$$y(t) = \exp(-tA)\, x(t)$$

pour transformer l'équation en

$$y'(t) = \exp(-tA)\,\varphi(t)$$

<u>Théorème</u> : Si φ est continue (ou plus généralement, localement intégrable) alors la courbe paramétrée

$$x(t) = \exp(tA)\, x_0 + \int_{t_0}^{t} \exp((t-s)A)\,\varphi(s)\, ds$$

est une solution de l'équation

$$x'(t) = Ax(t) + \varphi(t)$$

où $t_0 \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}^d$ sont arbitraire.

Considérons maintenant la situation plus générale

$$x'(t) = A(t)\, x(t)$$

où $A(\cdot)$ est une application continue d'un intervalle ouvert I dans $M_{d\times d}(\mathbb{R})$.

<u>Théorème</u> Pour tout $t_0 \in I$ et tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$, il existe un unique courbe paramétrée $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ telle que $\gamma(t_0) = x_0$ et qui vérifie l'équation $x'(t) = A(t)\, x(t)$.

<u>Démonstration</u> Pour tout intervalle compact $J \subset I$ tel que $x_0 \in J$, on désigne par Ω l'ensemble des courbe paramétrée $\gamma : J \to \mathbb{R}^d$ continue telle que $\gamma(t_0) = x_0$. On munit Ω de la distance

$$\operatorname{dist}(\gamma_1, \gamma_2) = \sup_{t\in J} \|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\|.$$

On définit $T : \Omega \to \Omega$ telle que $T\gamma(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)\,\gamma(s)\, ds$.

Soit $K = \sup_{t\in J} \|A(t)\|$. Pour γ_1 et γ_2 dans Ω, on a

$$\|T\gamma_1(t) - T\gamma_2(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} A(s)\left(\gamma_1(s) - \gamma_2(s)\right) ds \right\| \leq K \operatorname{dist}(\gamma_1, \gamma_2)\, |t - t_0|$$

Par récurrence on obtient que

$$\forall m \in \mathbb{N},\ m \geq 1 \qquad \| T^m \gamma_1(t) - T^m \gamma_2(t) \| \leq \frac{K^m}{m!} |t-t_0|^m \operatorname{dist}(\gamma_1, \gamma_2)$$

donc T^m est une contraction quand m est assez grand.

$\Rightarrow$ T possède un unique point fixe.

$\Rightarrow$ l'équation a une unique solution sur $\mathring{J}$. Comme J est arbitraire, on obtient le résultat.

On désigne par S l'espace des solutions de l'équation $(*)$ sur I. C'est un espace vectoriel de dimension d sur $\mathbb{R}$.

Si $t_0, t \in I$ et $x_0 \in \mathbb{R}^d$, on désigne par $R_{t_0}^t(x_0)$ la valeur en t de la courbe paramétrée $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ vérifiant l'équation $(*)$ et telle que $\gamma(t_0) = x_0$.

$$R_{t_0}^t : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d.$$

<u>Proposition</u> Soit $R_{t_0} : \mathbb{R}^d \longrightarrow S$ l'application qui envoie $x_0 \in \mathbb{R}^d$ en la courbe paramétrée vérifiant $(*)$ et telle que $\gamma(t_0) = x_0$. Alors R_{t_0} est une bijection linéaire. En outre, on a

$$R_{t_0}^t = R_t^{-1} \circ R_{t_0}.$$

En fin on s'intéresse à l'équation

$$x'(t) = A(t)\, x(t) + \varphi(t) \qquad t \in I \qquad (**)$$

Si γ_0 est une solution particulière de cette équation, alors toute solution de $(**)$ est de la forme $\gamma_0 + \gamma$ où $\gamma \in S$.

Comment trouver γ_0 ?

On suppose γ_0 de la forme $\gamma_0(t) = R_{t_0}^t\, y(t)$.

On a $\dfrac{d R_{t_0}^t}{dt} = A(t)\, R_{t_0}^t$ Donc

$$\gamma_0'(t) = \frac{d R_{t_0}^t}{dt} y(t) + R_{t_0}^t\, y'(t) = A(t)\, \gamma_0(t) + R_{t_0}^t\, y'(t).$$

Si γ_0 est une solution de

$$\gamma_0'(t) = A(t)\,\gamma_0(t) + \varphi(t)$$

alors on devrait avoir

$$R_{t_0}^{t}\, y'(t) = \varphi(t) \qquad \text{et donc } y'(t) = R_t^{t_0}\varphi(t).$$

Une solution particulière est

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} R_s^{t_0}\varphi(s)\, ds \qquad \text{et} \quad \gamma_0 = \int_{t_0}^{t} R_s^{t}\varphi(s)\, ds.$$

$\gamma(t_0) = x_0$

La solution γ de $(**)$ vérifiant la condition initiale est

$$\gamma(t) = R_{t_0}^{t} x_0 + \int_{t_0}^{t} R_s^{t}\varphi(s)\, ds.$$

§5 Transformation d'une équation d'ordre supérieur.

On considère l'équation

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$$

où x est une fonction définie sur un intervalle ouvert I et à valeurs réelles.

On note $y_1(t) = x(t)$, $y_2(t) = x'(t)$ $\cdots$ $y_n(t) = x^{(n-1)}(t)$

et $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$. On a

$$y'(t) = (y_2(t), \dots, y_n(t), y_n'(t))$$
$$= (y_2(t), \dots, y_n(t), f(t, x(t), \dots, x^{(n-1)}(t)))$$

On note F définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ telle que

$$F(t, a_1, \dots, a_n) = (a_2, \dots, a_n, f(t, a_1, \dots, a_n))$$

alors on a $y'(t) = F(t, y(t))$

On a donc transformé l'équation initiale en une équation d'ordre 1 (mais pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$).