Séance 2bis : Analyse sur $\mathbb{R}$ (II)

Soit E un ensemble non-vide

<u>Définition</u> On appelle **métrique** sur E toute application

$d : E \times E \longrightarrow [0, +\infty[$ qui vérifie les conditions suivantes.

(1) $\forall \ (x, y) \in E^2, \quad d(x, y) = d(y, x)$

(2) $\forall \ (x, y) \in E^2, \quad d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$

(3) pour tous points x, y et z dans E, on a

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

(E, d) est appelé un espace métrique.

<u>Exemple</u> $E = \mathbb{R} \quad d(x, y) = |x - y|$.

On dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x si $\lim\limits_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0$ notée $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$

§ 3 Topologie.

Dans ce paragraphe, on fixe un espace métrique (E, d).

<u>Boule</u> Si $P \in E$, $r > 0$, on désigne par $B(P; r)$ l'ensemble $\{Q \in E \mid d(P, Q) < r\}$

<u>Voisinage</u> Soient $P \in E$ et $V \subset E$.

On dit que V est un **voisinage** de P s'il existe $r > 0$ tel que $B(P; r) \subset V$

<u>Remarque</u> : Si $U \supset V$, alors V est aussi un voisinage de P.

<u>Ouvert</u> On dit qu'un sous-ensemble U de E est un **ouvert** s'il est voisinage de tous ses points.

<u>Exemple</u> $\emptyset$ est ouvert, E est ouvert.

toute boule $B(P; r)$ est ouverte

Si $Q \in B(P; r)$, $\varepsilon = d(P, Q)$
alors $B(Q; \varepsilon) \subset B(P; r)$
$\forall \ \xi \in B(Q; \varepsilon)$
$d(P, \xi) \leq d(P, Q) + d(Q, \xi)$

<u>Proposition 1.6</u>

(1) Si $(U_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts dans E et si $U = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$, alors U est un ouvert de E

(2) L'intersection de deux ouverts est encore ouvert.

<u>Démonstration</u>

(1) Soit P un point de U. Il existe $i \in I$ tel que $x \in U_i$.

Comme U_i est ouvert, il existe $r>0$ tel que $B(P;r) \subset U_i \subset U$.
Donc U est un ouvert.

(2) Soient U et V deux ouverts de E. Si P est un point de $U \cap V$, il existe $a>0$ et $b>0$ tels que $B(P;a) \subset U$ et $B(P,b) \subset V$.
Soit $r = \min(a,b)$. On a $B(P;r) \subset U \cap V$. ☆

<u>Définition</u> On dit qu'un sous-ensemble F de E est **fermé** si son complémentaire est un ouvert de E.

<u>Proposition 1.7</u>

(1) $\emptyset$ et E sont des fermés

(2) Si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de fermés dans E, alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un fermé

(3) Si F et G sont deux fermés de E, alors $F \cup G$ est un fermé.

<u>Démonstration</u> Passage aux complémentaires (on utilise Prop. 1.6).

<u>Points intérieurs</u>: Soit A un sous-ensemble de E. On désigne par A° l'ensemble des points $P \in A$ tels que A soit un voisinage de P, appelé l'intérieur de A.

<u>Proposition 1.8</u> A° s'identifie à la réunion de tout ouverts contenus dans A. (A° est le plus grand ouvert contenu dans A).

<u>Démonstration</u> Si U est un ouvert de E contenu dans A, alors pour tout $P \in U$, A est un voisinage de P puisque U l'est. Donc $U \subset A^\circ$. On en déduit que A° contient la réunion de tous les ouverts contenus dans A.

Réciproquement, si $P \in A^\circ$, alors il existe $r>0$ tel que $B(P;r) \subset A$. On a alors $B(P;r) \subset A^\circ$. Donc A° est un voisinage de P. Cela montre que A° est un ouvert.

Points adhérents

Soit $A \subset E$. On dit que $\xi \in E$ est un point adhérent de A s'il existe une suite $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans A telle que

$$\lim_{n \to \infty} d(\xi_n, \xi) = 0$$

(on note $\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi$)

On désigne par $\overline{A}$ l'intersection de tous les fermés de E qui contiennent A (c'est en fait le plus petit fermé $\supset A$).

<u>Proposition</u> Soit $A \subset E$, $\xi \in E$. Les conditions suivantes sont équivalentes.

(1) ξ est un point adhérent de A

(2) Pour tout voisinage V de ξ, $A \cap V \neq \emptyset$

(3) $\xi \in \overline{A}$

<u>Démonstration</u>

(1) $\Rightarrow$ (3) Soit $(\xi_n)_{n\geq 0}$ une suite dans A qui converge vers ξ.
Si $\xi \notin \overline{A}$, il existe $\varepsilon > 0$ telle que $B(\xi; \varepsilon) \subset (\overline{A})^c \subset A^c$ car $\overline{A}$ est fermé. Cependant, pour n assez grand $x_n \in B(\xi; \varepsilon)$. Cela est absurde

(3) $\Rightarrow$ (2) S'il existe un voisinage V de ξ telle que $A \cap V = \emptyset$, alors $V \subset A^c$. Cela implique que $V \subset (A^c)^\circ = \bigcup_{\substack{U \text{ ouvert} \\ U \subset A^c}} U$

$$= \Big(\bigcap_{\substack{F \text{ fermé} \\ F \supset A}} F\Big)^c = (\overline{A})^c$$

$F = U^c$

Cela est absurde

(2) $\Rightarrow$ (1) $\forall n \geq 1$, $n \in \mathbb{Z}$, on peut choisir $\xi_n \in A \cap B(\xi; \frac{1}{n})$.
On a $\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi$.

§ 4 Limite d'une fonction

On fixe un espace métrique (E, d)

<u>Fonction</u> Soit $A \subset E$. On appelle fonction sur A toute application de A vers $\mathbb{R}$.

Soient f une fonction définie sur $A \subset E$. Soit $P \in \overline{A}$.

On définit

$$\limsup_{\xi \in A,\ \xi \to P} f(\xi) = \inf_{\varepsilon > 0} \ \sup_{\substack{\xi \in A \\ 0 < d(\xi, P) < \varepsilon}} f(\xi)$$

$$\liminf_{\xi \in A,\ \xi \to P} f(\xi) = \sup_{\varepsilon > 0} \ \inf_{\substack{\xi \in A \\ 0 < d(\xi, P) < \varepsilon}} f(\xi).$$

<u>Théorème</u> 1.9 Soient $A \subset E$, f une fonction sur A et $P \in \overline{A}$. Les conditions suivantes sont équivalentes.

(1) $\exists\, l \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle \inf_{\varepsilon > 0} \ \sup_{\substack{\xi \in A \\ 0 < d(\xi, P) < \varepsilon}} |f(\xi) - l| = 0$ $\quad \left(= \limsup_{\xi \in A,\ \xi \to P} |f(\xi) - l| \right)$

(2) Pour toute suite $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $A \setminus \{P\}$ qui converge vers P, la suite $(f(\xi_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$

(3) $\displaystyle \limsup_{\xi \in A,\ \xi \to P} f(\xi)$ et $\displaystyle \liminf_{\xi \in A,\ \xi \to P} f(\xi)$ sont réelles et sont égales.

<u>Démonstration</u>

(1) $\Rightarrow$ (3) La condition (1) montre que la fonction f est bornée dans l'intersection de A avec un voisinage de P, donc $\displaystyle \limsup_{\xi \in A,\ \xi \to P} f(\xi)$ et $\displaystyle \liminf_{\xi \in A,\ \xi \to P} f(\xi)$ sont dans $\mathbb{R}$. En outre,

$$0 \leq \left(\limsup_{\xi \in A,\ \xi \to P} f(\xi) \right) - \left(\liminf_{\xi \in A,\ \xi \to P} f(\xi) \right)$$

$$\leq \inf_{\varepsilon > 0} \ \sup_{\substack{\xi, \eta \in A \\ 0 < d(\xi, P) < \varepsilon \\ 0 < d(\eta, P) < \varepsilon}} |f(\xi) - f(\eta)| \leq 2 \limsup_{\xi \in A,\ \xi \to P} |f(\xi) - l| = 0$$

(3) $\Rightarrow$ (2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\sup_{n \geq N} d(\xi_n, P) < \varepsilon$

Donc $$\sup_{\substack{\xi \in A \\ 0 < d(\xi, P) < \varepsilon}} f(\xi) \geq \sup_{n \geq N} f(\xi_n) \geq \limsup_{n \to \infty} f(\xi_n).$$

Comme ε est arbitraire, on obtient $\limsup_{\xi \in A, \xi \to P} f(\xi) \geq \limsup_{n \to \infty} f(\xi_n)$

Par la même raison $\liminf_{\xi \in A, \xi \to P} f(\xi) \leq \liminf_{n \to \infty} f(\xi_n)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Pour toute suite $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $A \setminus \{P\}$ qui converge vers P, la suite $(f(\xi_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la même limite que l'on notera l. Si $\limsup_{\xi \in A, \xi \to P} |f(\xi) - l| = \delta > 0$, pour tout entier $n \geq 1$, il existe $\xi_n \in A$, $0 < d(\xi_n, P) < \frac{1}{n}$ tel que

$|f(\xi_n) - l| > \frac{\delta}{2}$. Cela est absurde. $\not\!\times$

On dit que f possède une limite en P si elle vérifie les condition équivalentes dans le théorème, et on note la limite comme $\lim_{\xi \in A, \xi \to P} f(\xi)$

§5 Continuité

<u>Notation</u> Soient $A \subset E$ et f, g deux fonctions définies sur A.

On utilise l'expression

$$f(\xi) = O(g(\xi)) \qquad \xi \in A$$

ou $$f(\xi) \ll g(\xi) \qquad \xi \in A$$

pour désigne l'énoncé suivant :

$\exists \; C > 0$ telle que $|f(\xi)| \leq C \, |g(\xi)|$ pour tout $\xi \in A$.

Soit $P \in \overline{A}$. On utilise l'expression

$$f(\xi) = o(g(\xi)) \qquad \xi \in A, \quad \xi \to P$$

pour désigner :

$\exists$ une fonction $\varepsilon : A \to \mathbb{R}$, $\lim_{\xi \in A, \xi \to P} \varepsilon(\xi) = 0$ et un $\delta > 0$

tels que $|f(\xi)| \leq \varepsilon(\xi) \, |g(\xi)|$ pour tout $\xi \in A \cap (B(P; \delta) \setminus \{P\})$.

Définition Soit f une fonction définie sur $A \subset E$. On dit que la fonction f est continue en $P \in A$ si $\lim_{\xi \in A,\, \xi \to P} f(\xi) = f(P)$.

On dit que f est continue si elle est continue en tout point de A.

La continuité en $P \in A$ s'écrit aussi comme

$$f(\xi) = f(P) + o(1), \quad \xi \in A,\ \xi \to P$$

Exemple · La fonction constante est continue.

· Soit P un pt de A. la fonction $\xi \longmapsto d(\xi, P)$ est continue.

§6 Différentiabilité $(E = \mathbb{R})$.

Définition Soit f une fonction définie dans un voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f est différentiable en x_0 si $f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe dans $\mathbb{R}$.

ou $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \qquad x \to x_0$

Soit f une fonction définie sur un ouvert $U \neq \emptyset$ de $\mathbb{R}$. On dit que f est différentiable sur U si elle est différentiable en tout point de U.

(f' est de nouveau une fonction sur U).

Théorème des accroissements finis

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et différentiable sur $]a, b[$. alors il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

Définition Soit f une fonction définie sur un ouvert $U \neq \emptyset$ de $\mathbb{R}$.

On dit que f est de classe C^0 si elle est continue.

On dit que f est de classe C^n $(n \geq 1)$ si elle est différentiable sur U et f' est de classe C^{n-1}. On note $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$

Théorème Si f est de classe ~~C^{n-1} et $f^{(n-1)}$ est différentiable~~ C^{n-1} dans un voisinage de $x_0 \in U$ et $f^{(n-1)}$ est différentiable en x_0, alors

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$