Séance 3^{bis}

Soient (E, d) un espace muni d'une métrique d, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E et $P \in E$.

On dit que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers P si $\lim_{n\to\infty} d(P_n, P) = 0$.

Cette condition est équivalente à chacune des conditions suivantes:

(1) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}$ tel que $d(P_n, P) < \varepsilon$ quel que soit $n \geq N$

(2) Pour tout ouvert U contenant P, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $P_n \in U$ pour tout $n \geq N$.

(3) Pour tout voisinage V de P, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $P_n \in V$ quel que soit $n \geq N$.

<u>Remarque</u> La convergence des suites dans E ne dépend que la famille des ouverts de E.

§5 Continuité

<u>Notation</u>: Soient $A \subset E$ et f, g deux fonctions définies sur A. On utilise l'expression

$$f(\xi) = O(g(\xi)),\ \xi \in A \quad \text{ou} \quad f(\xi) \ll g(\xi) \quad \xi \in A$$

pour désigner l'énoncé suivant:

$\exists\, C > 0$ telle que $|f(\xi)| \leq C\,|g(\xi)|$ pour tout $\xi \in A$

Soit $P \in \bar{A}$ tel que P est un point adhérent de $A \setminus \{P\}$, on utilise l'expression

$$f(\xi) = o(g(\xi)) \quad \xi \in A,\ \xi \to P$$

pour désigner

$\exists$ une fonction $\varepsilon : A \to \mathbb{R}$, $\lim_{\xi\in A,\, \xi \to P} \varepsilon(\xi) = 0$ et $\delta > 0$ tels que

$$|f(\xi)| \leq \varepsilon(\xi)\, |g(\xi)| \quad \text{pour tout } \xi \in A \cap (B(P;\delta) \setminus \{P\}).$$

<u>Définition</u> Soit f une fonction définie sur $A \subset E$. On dit que la fonction f est continue en $P \in A$ si $\lim_{\xi\in A,\, \xi\to P} f(\xi) = f(P)$ ou si $P \notin \overline{A\setminus\{P\}}$.

Cette dernière condition montre qu'il existe $\delta > 0$ tel que $B(P;\delta) \cap A = \{P\}$, autrement dit, P est un point isolé de A.

Lorsque P n'est pas un point isolé, cette condition peut s'écrire comme

$$f(\xi) = f(P) + o(1) \quad \xi \in A,\ \xi \to P$$

<u>Exemple</u> Soit $\eta \in E$. La fonction $\xi \longrightarrow d(\xi, \eta)$ sur A est continue.

§6 Différentiabilité

<u>Définition</u> Soit f une fonction définie dans un voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f est différentiable en x_0 si

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{existe dans } \mathbb{R}$$

$$\hookrightarrow \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \qquad x \to x_0$$

Soit f une fonction définie sur un ouvert non-vide U de $\mathbb{R}$. On dit que f est différentiable sur U si elle est différentiable en tout point de U.
Ainsi f' devient une fonction sur U.

<u>Théorème</u> des accroissements finis.

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et différentiable sur $]a, b[$ alors il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

<u>Définition</u> Soit f une fonction définie sur un ouvert $U \neq \emptyset$ de $\mathbb{R}$

On dit que f est de classe C^0 si elle est continue

On dit que f est de classe C^n $(n \geq 1)$ si elle est différentiable sur U et f' est de classe C^{n-1}. On note $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ si f est n fois différentiable

<u>Théorème</u> Soit f une fonction n fois différentiable sur un voisinage de x_0, alors on a

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \qquad x \to x_0$$

CHAPITRE 2 Fonction en plusieurs variables.

§1 Espaces vectoriels normés.

<u>Définition</u> Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle norme sur E toute application $\|\cdot\| : E \to [0, +\infty[$ qui vérifie les conditions suivantes.

(1) $\|P\| = 0$ si et seulement si $P = 0$

(2) $\forall P \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda P\| = |\lambda| \cdot \|P\|$

(3) $\forall P, Q \in E \quad \|P + Q\| \leq \|P\| + \|Q\|$.

On dit que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.

On dit que $A \subset E$ est borné s'il existe $C > 0$ tel que $\|P\| \leq C$ quel que soit $P \in A$.

__Exemple__ . $E = \mathbb{R}$ $\quad \|x\| = |x|$

. $E = \mathbb{R}^d$ $\quad \|(x_1, \cdots, x_d)\|_{sup} = \max\limits_{1 \leq i \leq d} |x_i|$

. $E = \mathbb{R}^d$ $\quad \|(x_1, \cdots, x_d)\|_{\ell^1} = \sum\limits_{1 \leq i \leq d} |x_i|$

. $E = \mathbb{R}^d$ $\quad \|(x_1, \cdots, x_d)\|_{\ell^2} = \left(\sum\limits_{1 \leq i \leq d} |x_i|^2\right)^{1/2}$

__Fait__ :

Si ~~on~~ définit $d(P, Q) = \|P - Q\|$, alors d est une métrique sur E

__Notation__ On désigne par $T_{\|\cdot\|}$ l'ensemble des ouvert dans E par rapport à cette métrique, appelé la topologie de $\|\cdot\|$.

__Proposition 2.1__ Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur E. S'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|P\|_1 \leq C \|P\|_2$ quel que soit $P \in E$, alors $T_{\|\cdot\|_1} \subset T_{\|\cdot\|_2}$

__Démonstration__ Soit U un ouvert par rapport à $\|\cdot\|_1$. Pour tout $P \in U$ il existe $r > 0$ tel que $B_{\|\cdot\|_1}(P; r) \subset U$. On a alors

$$B_{\|\cdot\|_2}\left(P; \frac{r}{C}\right) \subset B_{\|\cdot\|_1}(P; r) \subset U$$

Si $\|P - Q\|_2 < \frac{r}{C}$, alors $\|P - Q\|_1 \leq C \cdot \|P - Q\|_2 < r$

__Corollaire__ S'il existe deux constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que

$C_1 \|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1 \leq C_2 \|\cdot\|_2$, alors $T_{\|\cdot\|_1} = T_{\|\cdot\|_2}$

__Exemple__ Sur $\mathbb{R}^d$ on a

$$\|\cdot\|_{sup} \leq \|\cdot\|_{\ell^2} \leq \|\cdot\|_{\ell^1} \leq d \, \|\cdot\|_{sup}.$$

Donc ces normes définissent la même topologie. (appelée la topologie usuelle)

设到第4节讲

__Théorème 2.2__ (Bolzano-Weierstrass). Toute suite bornée dans $\mathbb{R}$ possède une sous-suite convergente.

__Démonstration__. __Lemme__ : Si $A \subset \mathbb{R}$ est borné ~~(majoré)~~, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x \in A$ tel que $x > \sup A - \varepsilon$.

Supposons le contraire : $\exists \, \varepsilon > 0$ tel que $x \leq \sup A - \varepsilon$ quel que soit $x \in A$.

alors $\sup A - \varepsilon$ est un majorant de A $\rightsquigarrow$ $\sup A \leq \sup A - \varepsilon$.

Cela est absurde car $\sup A \in \mathbb{R}$.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. On construit par récurrence une famille d'indices $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec $n_0 < n_1 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$

Soit $n_0 = 0$. Si $(n_k)_{k=0}^{i-1}$ ont été choisis, on prend $n_i > n_{i-1}$ tel que

$$\left(\sup_{m > n_{i-1}} a_m\right) - \frac{1}{i} \leqslant a_{n_i} \leqslant \sup_{m > n_{i-1}} a_m$$

(l'existence de n_i provient du lemme).

Par passage à la limite quand $i \to +\infty$ on obtient

$$\lim_{i\to\infty} a_{n_i} = \limsup_{n\to+\infty} a_n.$$

※

该到第四节测

<u>Corollaire</u> Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}^d$ qui est bornée pour la norme $\|\cdot\|_{sup}$. Alors il existe une sous-suite de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge.

<u>Démonstration</u> : Récurrence sur la dimension d. ※

§2 Application continue

On fixe deux espaces vectoriels normés E et F.

<u>Définition</u> Soient A un sous-ensemble de E et $\varphi : A \to F$ une application. Soit $P \in A$. On dit que φ est continue en P si pour toute suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans A qui converge vers P, la suite $(\varphi(P_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\varphi(P)$.

On dit que φ est une application continue si elle est continue en tout point de A.

<u>Exemples</u> ① Toute forme linéaire sur $\mathbb{R}^d$ est continue.

Soit $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une application linéaire. Elle s'écrit sous la forme $\varphi(x_1, \ldots, x_d) = \sum_{i=1}^{d} a_i x_i$.

Si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $\mathbb{R}^d$, $P_n = (x_{n,1}, \ldots, x_{n,d})$, la convergence de $(P_n)_{n\geq 0}$ vers $P = (x_1, \ldots, x_d)$ signifie que

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n - P\|_{sup} = \lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant i\leqslant d} |x_{n,i} - x_i| = 0$$

On en déduit que chaque $(x_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_i.

Donc $\lim_{n\to\infty} \varphi(P_n) = \varphi(P)$.

(2) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $A \subset E$.

Si $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ sont des fonctions continues sur A, alors l'application $\Phi : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est continue. En effet, si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans A qui converge vers $P \in A$, alors

$$\| \Phi(P_n) - \Phi(P) \|_{sup} = \sup_{1\leq i\leq m} | \varphi_i(P_n) - \varphi_i(P) | \leq \sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(P_n) - \varphi_i(P)| \to 0$$

(3) Toute application linéaire de $\mathbb{R}^d$ vers $\mathbb{R}^m$ est continue.

Rappel. Soient E et F deux espaces vectoriels normés. $A \subset E$.
$\varphi : A \to F$ une applications. On dit que φ est continue si pour toute suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans A qui converge vers $P \in A$. la suite $(\varphi(P_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\varphi(P)$.

Théorème 2.3 Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés. $A \subset E$. $B \subset F$. Si $\varphi : A \to F$ et $\psi : B \to G$ sont deux applications continues telle que $\varphi(A) \subset B$. Alors $\psi \circ \varphi$ est une applicati[on] continu[e] de A vers G

Démonstratio[n] Si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans A qui converge ve[r]s $P \in A$, alors $(\varphi(P_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\varphi(P)$. d'où $(\psi(\varphi(P_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\psi(\varphi(P))$.

#

Théorème Soient E et F deux espace vectoriels normés, $A \subset E$.
$\varphi : A \to F$ une application. Alors φ est continu[e] en $P \in A$ si et seulement si, pour tout voisinage V de $\varphi(P)$, $\underbrace{\varphi^{-1}(V) \text{ est un voisinage de } P \text{ dans } A}$
$=$ il existe un voisinage U de P tel que $\varphi^{-1}(V) = U \cap A$.

Démonstration "$\Rightarrow$" On raisonne par absurde.
Si $\varphi^{-1}(V)$ ne peut pas être écrit sous la forme $U \cap A$ avec U un voisinage de P, alors $\forall\, n \geq 1$ on peut choisir $P_n \in B(P; \frac{1}{n}) \setminus \varphi^{-1}(V)$
La suite $(P_n)_{n\geq 1}$ converge vers P. mais $(\varphi(P_n))_{n\geq 1}$ reste en dehors de V.

"$\Leftarrow$" Soit $(P_n)_{n\geq 0}$ une suite dans A qui converge vers $P \in A$.
Si V est un voisinage de $\varphi(P)$ de la forme $B(\varphi(P); \varepsilon)$, alors $\varphi^{-1}(V)$ s'écrit sous la form[e] $U \cap A$ avec U un voisinage de P.
Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $P_n \in U$ pour $n \geq N$.
On en déduit $\underbrace{\varphi(P_n) \in V}$ pour $n \geq N$
$\hookrightarrow \|P_n - P\| < \varepsilon$

#

<u>Corollaire</u> Soient E et F deux espaces vectoriels, $A \subset E$ et $\varphi : A \to F$ une application continue. Pour tout ouvert V de F, $\varphi^{-1}(V)$ s'écrit sous la forme $\mathcal{U} \cap A$ où $\mathcal{U}$ est un ouvert de E.

<u>Démonstration</u> Comme V est un ouvert, il est voisinage de tout ses points. Par conséquent, $\varphi^{-1}(V)$ est un voisinage relatif de tout point dans $A \cap \varphi^{-1}(V)$. Autrement dit, pour tout $P \in A \cap \varphi^{-1}(V)$, il existe $r_P > 0$ tel que $B(P; r_P) \cap A \subset \varphi^{-1}(V)$. Soit $\mathcal{U} = \bigcup_{P \in A \cap \varphi^{-1}(V)} B(P; r_P)$. C'est un ouvert de E et on a $\mathcal{U} \cap A = \varphi^{-1}(V) \cap A$. ✲

<u>Corollaire</u> Avec les mêmes notations, pour tout fermé $H \subset F$, $\varphi^{-1}(H)$ s'écrit comme $M \cap A$, où M est un fermé de E.

<u>Démonstration</u> passage aux complémentaire.