Séance 4 (CHAPITRE II)

Rappels : ouverts, fermés de $\mathbb{R}$

§ 2 Compacité

Théorème (Bolzano-Weierstraß) Toute suite bornée dans $\mathbb{R}$ possède une sous-suite convergente.

Lemme Soit $A \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble borné. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x \in A$ tel que $x > \sup A - \varepsilon$

Preuve On raisonne par absurde. Supposons le contraire : $\exists\, \varepsilon > 0$ tel que $x \leq \sup A - \varepsilon$ quel que soit $x \in A$. Alors $\sup - \varepsilon$ est un majorant de A $\rightsquigarrow$ $\sup A \leq \sup A - \varepsilon$. Cela n'est pas possible car $\sup A \in \mathbb{R}$. ☆

Démonstration du théorème

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. On construit par récurrence une famille d'indices $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec $n_0 < n_1 < \dots$

Soit $n_0 = 0$. Si $(n_k)_{k=0}^{i-1}$ ont été choisis, on prend $n_i > n_{i-1}$ tel que

$$\left(\sup_{m > n_{i-1}} a_m\right) - \frac{1}{i} \leq a_{n_i} \leq \sup_{m > n_{i-1}} a_m \quad \text{(l'existence de } n_i \text{ provient du lemme)}$$

Par passage à la limite quand $i \to +\infty$, on obtient $\lim_{i\to+\infty} a_{n_i} = \limsup_{n\to\infty} a_n$.

Corollaire Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}^d$ qui est bornée pour la norme $\|\cdot\|_{\sup}$. Alors il existe une sous-suite de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge.

Démonstration Récurrence sur la dimension d. ☆

Théorème Soit f une fonction continue définie sur une partie fermée et bornée A de $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_{\sup})$. Alors

① La fonction f atteint son maximum et son minimum sur A

② La fonction f est uniformément continue, i.e.

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{\substack{(P,Q)\in\mathbb{R}^2 \\ \|P-Q\|_{\sup} < \delta}} |f(P) - f(Q)| = 0.$$

Démonstration ① On peut construire une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans A telle que $(f(P_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\sup f$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstraß, quitte à remplacer $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par une sous-suite, on peut supposer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point $P \in \mathbb{R}^d$. En outre, comme A est un fermé, on a forcément $P\in A$. Comme f est une fonction continue, on obtient

$$f(P) = \lim_{n\to\infty} f(P_n) = \sup f.$$

De façon similaire, on peut montrer que f atteint son minimum. ✱

(2) Supposons que f n'est pas uniformément continue, il existe alors $\varepsilon>0$ et deux suites $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans A tels que $\lim_{n\to\infty}\|P_n-Q_n\|_{\sup}=0$ mais $|f(P_n)-f(Q_n)|>\varepsilon$ quel que soit $n\in\mathbb{N}$. Quitte à choisir des sous-suites de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut les supposer convergentes vers P et Q respectivement, qui sont tous les deux dans A car A est fermé. Comme $\lim_{n\to\infty}\|P_n-Q_n\|_{\sup}=0$, on a $\|P-Q\|_{\sup}=0$ et donc $P=Q$. Cela montre que $\lim_{n\to\infty} f(P_n) = \lim_{n\to\infty} f(Q_n) = f(P)$. absurde. ✱

Remarque

De manière similaire, on peut montrer que, si A est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^d$ alors toute application continue φ de A vers un espace métrique est uniformément continue.

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{\substack{(P,Q)\in A^2\\ \|P-Q\|_{\sup}<\delta}} d(f(P), f(Q)) = 0.$$

Corollaire Pour toute norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^d$, il existe deux constantes strictement positives C_1 et C_2 telles que $C_1\|\cdot\|_{\sup} \leqslant \|\cdot\| \leqslant C_2\|\cdot\|_{\sup}$.

Démonstration L'ensemble $S=\{P\in\mathbb{R}^d \mid \|P\|_{\sup}=1\}$ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^d$ ($\|\cdot\|_{\sup}^{-1}(\{1\})$).

Soit $\|\cdot\|$ une autre norme sur $\mathbb{R}^d$. Soit $(e_i)_{i=1}^d$ la base canonique

$\forall\,(\lambda_1,\ldots,\lambda_d)\in\mathbb{R}^d$,

$$\|(\lambda_1,\ldots,\lambda_d)\| \leqslant \sum_{i=1}^d |\lambda_i|\cdot\|e_i\| \leqslant \left(\sum_{i=1}^d \|e_i\|\right)\cdot\|(\lambda_1,\ldots,\lambda_d)\|_{\sup}.$$

Cela montre l'existence d'un $C_2>0$ tel que $\|\cdot\| \leqslant C_2\|\cdot\|_{\sup}$.

Lemme Soient E et F deux espace vectoriels normé, $\varphi : E \to F$ une application linéaire. Alors φ est continue si et seulement s'il existe $C>0$ telle que $\|\varphi(P)\| \leq C\|P\|$ quel que soit $P \in E$

Démonstration "$\Leftarrow$" est trivial car $\|\varphi(P)-\varphi(Q)\| \leq C\|P-Q\|$.

"$\Rightarrow$" Soit $U = B(0_F ; 1)$. Si φ est continue, alors $\varphi^{-1}(U)$ est un ouvert contenant 0_E donc un voisinage de 0_E. Il existe alors $\varepsilon>0$ tel que $B(0_E, 2\varepsilon) \subset \varphi^{-1}(U)$. Pour tout $P \in E$, $P \neq 0$, on a

$$\|\varphi(P)\| = \left\| \frac{\|P\|}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{\varepsilon}{\|P\|}\cdot P\right)\right\| = \frac{\|P\|}{\varepsilon}\cdot \Big\|\underbrace{\varphi\left(\frac{\varepsilon}{\|P\|}\cdot P\right)}_{\text{dans } \varphi^{-1}(U)}\Big\| \leq \frac{\|P\|}{\varepsilon}$$

*

Continuation de la démonstration du théorème.

Le lemme montre que $Id : (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_{sup}) \to (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$ est continue, donc $\|\cdot\| : (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_{sup}) \to \mathbb{R}$ est aussi continue. Il existe alors $P \in S$ tel que $\|\cdot\|_{|S}$ atteint son minimum en P. Cela montre que $\alpha := \min_{Q \in S} \|Q\| > 0$.

Pour tout $Q \in \mathbb{R}^d$, $Q \neq 0$, on a

$$\|Q\| = \|Q\|_{sup} \left\| \frac{1}{\|Q\|_{sup}} Q \right\| \geq \alpha \|Q\|_{sup}.$$

§3. Dérivée partielle et différentielle.

Soit P un point de $\mathbb{R}^d$ de coordonnées $(a_1, \dots, a_d)$

Soit f une fonction définie dans un voisinage de P. On dit que la fonction f possède la dérivée partielle en $i^{\text{ème}}$ coordonnée en P si la limite

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(P) := \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_d) - f(P)}{h}$$

existe dans $\mathbb{R}$.

Exemple $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = x + y^2 x$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2yx$$

y est considéré comme une constante

x est considérér comme une constante.

On dit que f est différentiable en P s'il existe une application linéaire $Df(P)$ telle que, ~~pour tout h~~

$$f(P+h) = f(P) + Df(P)(h) + o(\|h\|) \qquad h \to 0.$$

Proposition Si f est différentiable en P, alors elle a toutes les dérivées partielles, de plus, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(P) = Df(P)(e_i)$$

où $\{e_1, \dots, e_d\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

Démonstration On a

$$\begin{aligned} f(P+te_i) &= f(P) + Df(P)(te_i) + o(\|te_i\|) \\ &= f(P) + t\, Df(P)(e_i) + o(|t| \cdot \|e_i\|) \end{aligned}$$

Donc on obtient le résultat. ※

Théorème Soient $\varepsilon > 0$, $P \in \mathbb{R}^d$ et f une fonction définie sur $\mathcal{U} = B_{\|\cdot\|_{sup}}(P, \varepsilon)$ et qui possède toutes les dérivées partielles en chaque point de $\mathcal{U}$.
Alors pour tout $Q \in \mathcal{U}$, il existe des points $R_1, \dots, R_d$ dans $B(P, \|Q-P\|)$ tel que

$$f(Q) - f(P) = \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(R_1), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_d}(R_d) \right), Q - P \right\rangle.$$

Démonstration On suppose $P = (a_1, \dots, a_d)$ $Q = (b_1, \dots, b_d)$

On a

$$\begin{aligned} f(Q) - f(P) &= \sum_{i=1}^{d} f(a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, \dots, b_d) - f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, b_{i+1}, \dots, b_d) \\ &= \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_{i-1}, \xi_i, b_{i+1}, \dots, b_d) \cdot (b_i - a_i) \end{aligned}$$

$\exists\, \xi_i$ d'après le théorème des accroissements finis ※

Notation $\{e_1, \dots, e_d\}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^d$

$\{e_1^\vee, \dots, e_d^\vee\}$ désigne la base duale de $(\mathbb{R}^d)^\vee = \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$

$$e_i^\vee(x_1 e_1 + \dots + x_d e_d) = x_i.$$

Si $(x_1, \dots, x_d)$ désigne les coordonnées (indéterminées), on utilise aussi l'expression dx_i pour désigner $e_i^\vee$

Corollaire Soit U un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^d$ et f une fonction définie sur U. On suppose que les dérivées partielles de f existent en chaque point de U et que $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial f}{\partial x_d}$ sont des fonction continues. Alors la fonction f est différentiable en chaque point de U et on a

$$Df = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i$$

Démonstration Soit $P = (a_1, \dots, a_d)$ un point de U. Soit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit tel que $B_{\|\cdot\|_{sup}}(P; \varepsilon) \subset U$. Pour tout $h \in \mathbb{R}^d$, $\|h\|_{sup} < \varepsilon$.
$h = (h_1, \dots, h_d)$

On a des points $R_1(h), \dots R_d(h) \in B_{\|\cdot\|_{sup}}(P, \|h\|_{sup})$ tels que

$$f(P+h) = f(P) + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(R_i(h)) \cdot h_i$$

Les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont continues, donc $\frac{\partial f}{\partial x_i}(R_i(h)) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) + o(1)$
$\|h\|_{sup} \to 0$.

On obtient alors

$$f(P+h) = f(P) + \underbrace{\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P)\, h_i}_{= \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P)\, dx_i(h)} + o(\|h\|_{sup}) \quad \|h\|_{sup} \to 0.$$

Le résultat est donc démontré.