Soient $U \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application. Il existe des fonctions $f_1, \dots, f_m$ sur U telles que

$$\forall\ P \in U \qquad f(P) = (f_1(P), \dots, f_m(P))$$

Définition On dit que la fonction f est différentiable en $P \in U$ s'il existe une application linéaire de $\mathbb{R}^d$ vers $\mathbb{R}^m$, que l'on note comme $Df(P)$, telle que

$$f(P+h) = f(P) + Df(P)(h) + o(\|h\|) \qquad (\|h\| \to 0).$$

$$\left(\text{i.e.} \quad \| f(P+h) - f(P) - Df(P)(h) \| = o(\|h\|) \qquad h \to 0 \right)$$

Proposition Avec les notations comme ci-dessus, l'application f est différentiable en P si et seulement si chacune des fonctions $f_1, \dots, f_m$ est différentiable en P. De plus, on a $\quad Df(P) = (Df_1(P), \dots, Df_m(P))$.

Démonstration Soit $h \in \mathbb{R}^d$ avec $\|h\|$ assez petit. On a

$$\| f(P+h) - f(P) - (Df_1(P), \dots, Df_m(P))(h) \|_{sup}$$

$$= \| (f_1(P+h) - f_1(P) - Df_1(P)(h), \dots, f_m(P+h) - f_m(P) - Df_m(P)(h)) \|$$

$$= \max_{1 \le i \le m} | f_i(P+h) - f_i(P) - Df_i(P)(h) | = o(\|h\|) \qquad h \to 0. \qquad *$$

Corollaire La matrice de $Df(P)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^m$ est

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P), & \cdots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_d}(P) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P), & \cdots, & \frac{\partial f_m}{\partial x_d}(P) \end{pmatrix}$$

appelée la matrice jacobienne de la fonction f en P

Version abstraite

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, U un ouvert de E et f une application de U vers F. On dit que f est différentiable en $P \in U$ s'il existe une application linéaire continue, que l'on note comme $Df(P)$, telle que

$$f(P+h) = f(P) + Df(P)(h) + o(\|h\|) \qquad h \to 0.$$

Remarque ① Si f est différentiable en P, alors pour tout $h \in E$, la limite
$$\lim_{t \to 0} \frac{f(P+th) - f(P)}{t}$$
existe dans F. On la note comme $\partial_h f(P)$, appelée la dérivée de f dans la direction de h.

② Si f est différentiable en chaque point de U, alors $P \mapsto Df(P)$ définit une application de U vers l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires continues de E vers F.

Théorème Soient E, F et G trois espaces vectoriels normé, U un ouvert de E, V un ouvert de F, $f : U \to F$ et $g : V \to G$ deux applications telles que $f(U) \subset V$. On suppose que f est différentiable en $P \in U$ et que g est différentiable en $f(P)$. Alors l'application composée $g \circ f$ est différentiable en P et on a
$$D(g \circ f)(P) = Dg(f(P)) \circ Df(P)$$

Démonstration Soit h un élément de E tel que $\|h\|$ soit assez petit.
Soit $\xi = f(P+h) - f(P)$. Comme f est différentiable en P, on a
$$\xi = Df(P)(h) + o(\|h\|).$$
En outre, comme g est différentiable en $f(P)$, on a
$$g(f(P+h)) - g(f(P)) = g(f(P) + \xi) - g(f(P)) = Dg(f(P))(\xi) + o(\|\xi\|).$$
$$= Dg(f(P))\big(Df(P)(h) + o(\|h\|)\big) + o(\|\xi\|)$$
$$= Dg(f(P))(Df(P)(h)) + o(\|h\|).$$
✻

§4 Différentielles supérieures.

Fait Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Alors
$$\mathcal{L}(E, F) = \{\text{applications linéaires continues de } E \text{ vers } F\}$$
est un espace vectoriel normé.

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. on définit
$$\|\varphi\| := \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| = 1}} \|\varphi(x)\| \quad (< +\infty),$$
appelée la norme d'opérateur de φ.

$\|\cdot\|$ définit une norme sur l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$.

Proposition La norme d'opérateur est une norme sur $\mathcal{L}(E.F)$.

Démonstration (1) Si $\|\varphi\|=0$, alors φ est identiquement nulle sur $\{x\in E \mid \|x\|=1\}$.

Pour tout $y\in E$, $y\neq 0$, on a

$$\varphi(y) = \frac{1}{\|y\|}\,\varphi\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = 0.$$

(2) $\forall \lambda\in\mathbb{R}$, $\|\lambda\varphi\| = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|=1}} \|\lambda\varphi(x)\| = |\lambda|\cdot \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|=1}} \|\varphi(x)\| = |\lambda|\cdot\|\varphi\|.$

(3) Si φ et ψ sont deux éléments dans $\mathcal{L}(E.F)$. on a

$$\sup_{\|x\|=1} \|\varphi(x)+\psi(x)\| \leq \sup_{\|x\|=1}\left(\|\varphi(x)\|+\|\psi(x)\|\right) \leq \left(\sup_{\|x\|=1}\|\varphi(x)\|\right) + \left(\sup_{\|x\|=1}\|\psi(x)\|\right)$$

※

Définition Soient E et F deux espaces vectoriels normés. $U\subset E$ un ouvert. $f: U\to F$ une application. On dit que f est n fois différentiable en $P\in U$ si elle est différentiable dans un voisinage de P et Df est $(n-1)$ fois différentiable en P. On note $D^n f = D^{n-1}(Df)$. On dit que f est de classe C^n si f est n fois différentiable et $D^n f$ est continue

Remarque $D^n f$ est une application de U vers

$$\mathcal{L}^{(n)}(E,F) = \underbrace{\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, \dots, \mathcal{L}}_{n \text{ fois}}(E,F)\cdots)$$

Exemple Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $f: U\to\mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable en $P\in U$, alors $D^2f(P)$ est un élément dans $\mathcal{L}^{(2)}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$
$= \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}))$

Pour $h_1\in\mathbb{R}^d$ $D^2f(P)(h_1)$ est un élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$, on peut appliquer à un autre $h_2\in\mathbb{R}^d$. On note

$$D^2f(P)(h_1,h_2) := D^2f(P)(h_1)(h_2).$$

On peut ainsi considérer $D^2f(P)$ comme une application de $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ vers $\mathbb{R}$. qui est linéaire par rapport aux deux composantes de $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$.

Définition Soit $H: \mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une application.

On dit que H est une forme bilinéaire si $\forall\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $P,Q,R\in\mathbb{R}^d$, on a

$$H(\lambda P+\mu Q;\ R) = \lambda H(P,R) + \mu(Q,R).\qquad H(R,\ \lambda P+\mu Q) = \lambda\, H(R,P)+\mu(R,Q).$$

On dit que H est symétrique si $H(P,Q) = H(Q,P)$.

Proposition Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^d$. Si f est deux fois différentiables sur $P \in U$ et de classe C^2 dans un voisinage de P, alors $D^2 f(P)$ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

Démonstration Soient h_1 et h_2 deux éléments dans $\mathbb{R}^d$. On considère la fonction
$$A(\lambda, \mu) = f(P + \lambda h_1 + \mu h_2) - f(P + \lambda h_1) - f(P + \mu h_2) + f(P).$$
On a
$$\frac{\partial A}{\partial \lambda} = \partial_{h_1} f(P + \lambda h_1 + \mu h_2) - \partial_{h_1} f(P + \lambda h_1)$$
$$\frac{\partial A}{\partial \mu} = \partial_{h_2} f(P + \lambda h_1 + \mu h_2) - \partial_{h_2} f(P + \mu h_2)$$

D'après le théorème des accroissements finis, il existe $\tilde{\lambda}$, $|\tilde{\lambda}| < |\lambda|$ tel que
$$A(\lambda, \mu) - \underbrace{A(0, \mu)}_{=0} = \left(\partial_{h_1} f(P + \tilde{\lambda} h_1 + \mu h_2) - \partial_{h_1} f(P + \tilde{\lambda} h_1)\right)\lambda$$
il existe ensuite $\tilde{\mu}$, $|\tilde{\mu}| < |\mu|$ tel que
$$A(\lambda, \mu) = \partial_{h_2} \partial_{h_1} f(P + \tilde{\lambda} h_1 + \tilde{\mu} h_2)\, \lambda \mu.$$
On obtient alors
$$\partial_{h_2} \partial_{h_1} f(P) = \lim_{\max(|\lambda|, |\mu|) \to 0} \frac{A(\lambda, \mu)}{\lambda \mu}$$
Par la même raison, $\partial_{h_1} \partial_{h_2} f(P) =$ la même limite. ⁂

§ 5 Étude Locale

Soit A un sous-ensemble non-vide dans $\mathbb{R}^d$. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que $a \in A$ est un point de maximum / minimum local de f s'il existe un voisinage V de a tel que $f(a) = \max / \min f(A \cap V)$. On dit que a est un point de maximum / minimum global de f si $f(a) = \max / \min f(A)$.

Proposition Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^d$ qui est différentiable en $P \in U$. Alors P est un point de maximum / minimum local implique $Df(P) = 0$

Démonstration On suppose que P est un maximum local.

Soit $h \in \mathbb{R}^d$ quelconque. Pour tout $t>0$ assez petit, on a $f(P+th) \leq f(P)$. Donc $\partial_h f(P) = \lim_{t \to 0} \frac{f(P+th)-f(P)}{t} \leq 0$

Par la même raison, (pour $t<0$) on obtient $\partial_h f(P) \geq 0$. Donc

$$Df(P)(h) = \partial_h f(P) = 0$$

<u>Définition</u> Soit f une fonction définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^d$. On dit que $P \in U$ est un point critique de f si f est différentiable en P et si $Df(P) = 0$

<u>Remarque</u> Si f est différentiable en P et P est un $\begin{matrix}\text{maximum}\\ \text{minimum}\end{matrix}$ local, alors P est un point critique

Soit H une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel E. On dit que H est définie $\begin{matrix}\text{positive}\\ \text{négative}\end{matrix}$ si $\cancel{D^2f(P}$ $\begin{matrix}H(x,x)>0\\ H(x,x)<0\end{matrix}$ $\forall x \in E, x \neq 0$.

<u>Théorème</u> Soit f une fonction de classe C^2 définie sur un ouvert non-vide U de $\mathbb{R}^d$. Si P est un point critique de f et si $D^2f(P)$ est une forme définie $\begin{matrix}\text{positive}\\ \text{négative}\end{matrix}$, alors P est un point de $\begin{matrix}\text{maximum}\\ \text{minimum}\end{matrix}$ local de f.

<u>Démonstration</u> D'après le théorème des accroissements finis, il existe $\lambda \in]0,1[$ tel que $f(P+th) - f(P) = Df(P+\lambda th)(th)$ $\cancel{= \lambda t^2 D^2f(P)(h,h) + o(t^2)}$.

~~Puis il existe~~ $\cancel{0<\tilde\lambda<\lambda \text{ tel que } \lambda Df(P+\lambda h)(h) = D^2f(P+\tilde\lambda h)(h,h)}$

~~Donc~~ Comme $D^2f(P)(h,h)>0 \quad \forall \|h\|=1$. on déduit

$$f(P+h) - f(P) = Df(P+\lambda h)h = D^2f(P)(h,h) + o(\|h\|^2) \qquad h \to 0.$$

Comme ~~la bou~~ le cercle unité de $\mathbb{R}^d$ est compact (fermé + bornée), il existe $\varepsilon>0$ tel que $\|D^2f(P)(h,h)\| \geq \varepsilon \|h\|^2$ si $h \in \mathbb{R}^d$.

Donc $f(P+h) - f(P) \geq 0$ lorsque $\|h\|$ est assez petit ⌧

<u>Hessian</u> $H_P(f) =$ la matrice de $D^2f(P)$ $= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_d} \\ & \ddots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_d^2} \end{pmatrix}$.

$D^2f(P)$ est définie $\begin{matrix}\text{positive}\\ \text{négative}\end{matrix}$ si toutes les valeurs propres de $H_P(f)$ sont $\begin{matrix}>0\\ <0\end{matrix}$.

(Contenu de MAT244).