Séance 7 Intégration

§1 Fonctions simples.

Soit $S(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel engendré par les fonctions de la forme $\mathbb{1}_{]a,b]}$ avec a et b dans $\mathbb{R}$, $a<b$. Soit $S_+(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions positives dans $S(\mathbb{R})$

Si f est une fonction dans $S(\mathbb{R})$ qui s'écrit comme

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \mathbb{1}_{]a_i,b_i]}(t)$$

On définit $I(f) := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (b_i - a_i)$

si $f \in S(\mathbb{R})$, $|f| \in S_+(\mathbb{R})$
si f et $g \in S(\mathbb{R})$
$f \wedge g = \min(f,g) \in S(\mathbb{R})$
$f \vee g = \max(f,g) \in S(\mathbb{R})$

Fait L'expression $I(f)$ ne dépend pas de la représentation de f comme une combinaison linéaire de fonctions de la forme $\mathbb{1}_{]a,b]}$

Quelque propriétés de l'application $I: S(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

① I est une application linéaire

$$I(f+g) = I(f) + I(g) \qquad I(\lambda f) = \lambda I(f)$$

② I préserve la relation d'ordre :

Si $f \leq g$, alors $I(f) \leq I(g)$

Notation Support d'une fonction

Si f est une fonction sur $\mathbb{R}$, son support est défini comme

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}}$$

On dit que f est à support compact si $\mathrm{supp}(f)$ est borné.

Observation Si $f(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \mathbb{1}_{]a_i,b_i]}(t)$ est une fonction dans $S(\mathbb{R})$ avec $\lambda_i > 0$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, alors

$$\mathrm{supp} f = \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i].$$

Proposition Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une famille de sous-ensembles non-vides de $\mathbb{R}$. On suppose que ⟨1⟩ la famille est décroissante: $A_0 \supset A_1 \supset \cdots$

⟨2⟩ chaque ensemble A_n dans la famille est fermé et borné.

Alors $\bigcap_{n\geq 0} A_n$ est non-vide.

Démonstration Pour tout entier n, soit x_n un point de A_n.
La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est bornée, donc elle admet une sous-suite convergeante. $(x_{n_k})_{k\geq 0}$. Soit y sa limite. Comme A_n contient $(x_k)_{k\geq n}$, on obtient $y \in A_n$ car A_n est fermé. ✲

Lemme Soit f une fonction dans $S(\mathbb{R})$ tel que $f \geq 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $f_\varepsilon \in S(\mathbb{R})$ qui vérifie les conditions suivante :
① $\mathrm{supp}(f_\varepsilon) \subset \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\}$ ② $f_\varepsilon \leq f$.
③ $I(f_\varepsilon) \geq I(f) - \varepsilon$. ④ Si $f_\varepsilon(t) \neq 0$, alors $f_\varepsilon(t) = f(t)$

Démonstration On suppose que f s'écrit sous la forme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{1}_{]a_i, b_i]}$ avec $\lambda_i > 0$ et les $]a_i, b_i]$ disjoints. Alors la fonction
$$f_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{1}_{]a_i + \frac{\varepsilon}{n}, b_i]}$$
vérifie les trois conditions. ✲

Si $a \leq b$, alors $]b, a]$ est l'ensemble vide par convention.

Théorème Soit (f_n) une suite décroissante de fonctions dans $S_+(\mathbb{R})$ qui converge vers 0, alors $\lim_{n\to\infty} I(f_n) = 0$

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$ un nombre. On écrit f_n comme la somme de deux fonctions g_n et h_n dans $S_+(\mathbb{R})$ telles que
$$g_n(t) = \begin{cases} f_n(t) & \text{si } f_n(t) \geq \varepsilon \\ 0 & \text{si } f_n(t) < \varepsilon \end{cases} \qquad h_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } f_n(t) \geq \varepsilon \\ f_n(t) & \text{si } f_n(t) < \varepsilon. \end{cases}$$
les fonctions g_n et h_n sont dans $S_+(\mathbb{R})$, et $g_n + h_n = f_n$.
Soit $]a, b]$ un intervalle que contient $\mathrm{supp} f_0$, alors on a $h_n \leq \varepsilon \mathbb{1}_{]a,b]}$ d'où $I(h_n) \leq \varepsilon(b-a)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit $\tilde{g}_n \in S(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{supp}(\tilde{g}_n) \subset \{x \in \mathbb{R} \mid g_n(x) > 0\}$, $\tilde{g}_n \leq g_n$ et $I(\tilde{g}_n) \geq I(g_n) - \frac{\varepsilon}{2^n}$

Soient en outre $\varphi_0 = \tilde{g}_0$ $\varphi_1 = \tilde{g}_1 \wedge \varphi_0$, ..., $\varphi_n = \tilde{g}_n \wedge \varphi_{n-1}$
où $\varphi \wedge \psi$ désigne $\min(\varphi, \psi)$.
On a $\varphi_0 \geq \varphi_1 \geq \cdots$ Donc $\mathrm{supp}(\varphi_0) \supset \mathrm{supp}(\varphi_1) \supset \cdots$

Si $\tilde{g}_n(t) \neq 0$ alors $\tilde{g}_n(t) = g_n(t)$

en outre, $\varphi_n \leq g_n$, et $\varphi_n(t) \geq \varepsilon$ dès que $\varphi_n(t) > 0$.
Comme $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ on obtient $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = 0$.

Si les $\mathrm{supp}(\varphi_n)$ sont nonvide, il existe un point $x \in \bigcap_{n\geq 0} \mathrm{supp}(\varphi_n)$. De plus, pour tout n, $x \in \mathrm{supp}(\varphi_n) \subset \{t \in \mathbb{R} \mid g_n(t) > 0\}$.

Donc $\varphi_n(x) \geq \varepsilon$. Cela est absurde !

On en déduit qu'il existe k tel que $\varphi_k = 0$.

En outre $I(\tilde{g}_n - \varphi_n) = I(\tilde{g}_n - \varphi_{n-1} \wedge \tilde{g}_n) \leq I(g_{n-1} - \varphi_{n-1} \wedge g_{n-1})$

car $\tilde{g}_n \leq g_n \leq g_{n-1}$

$$= \cancel{\ } I(g_{n-1} - \varphi_{n-1})$$

$$\Rightarrow \quad I(g_n - \varphi_n) \leq I(g_{n-1} - \varphi_{n-1}) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Cela montre que $I(g_n - \varphi_n) \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon}{2^k} < 2\varepsilon$

En particulier $I(g_n) < 2\varepsilon$ pour tout $n \geq k$

On en déduit $\limsup_{n\to\infty} I(f_n) \leq \varepsilon(b-a+2)$.

Comme ε est arbitraire, on obtient le résultat.

$\divideontimes$

§2 Théorie d'intégration.

Soit Ω un ensemble non-vide et S ~~une famille~~ un espace vectoriel de fonctions réelles sur Ω. On dit que S est filtrant si, pour tout couple (f, g) de fonctions dans S, on a $f \wedge g = \min(f, g) \in S$

<u>Proposition</u> Si S est filtrante, alors $\forall\, f \in S,\ g \in S$, on a

$$f \vee g := \max(f, g) \in S, \qquad |f| \in S$$

<u>Démonstration</u> $f \vee g = f + g - f \wedge g \qquad |f| = f \vee 0 - f \wedge 0$

Dans la suite, on fixe un ensemble non-vide Ω et un espace vectoriel filtrant de fonctions sur Ω.

<u>Définition</u> On appelle application d'intégration sur S toute application linéaire $I : S \to \mathbb{R}$ qui vérifie la condition suivante :

① Si $f \geq 0$, alors $I(f) \geq 0$.

② Pour toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante de fonctions dans $\mathcal{L}$ qui converge vers 0, on a $\lim\limits_{n\to\infty} I(f_n) = 0$.

<u>Exemple</u> $S = S(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions simples. $I : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{1}_{]a_i ; b_i]} \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (b_i - a_i).$$

<u>Proposition</u> Soit I une application d'intégration sur S.
Si $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante dans S qui converge vers une fonction $f \in S$, alors on a $\lim\limits_{n\to\infty} I(f_n) = I(f)$

<u>Démonstration</u> Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $g_n = f - f_n$. La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} I(g_n) = 0$.
Or $I(g_n) = I(f) - I(f_n)$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} I(f_n) = I(f)$.

<u>Corollaire</u> Soient $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante de fonctions dans S et $f \in S$.
Si $f \leq \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, alors $I(f) \leq \lim\limits_{n\to\infty} I(f_n)$.

<u>Démonstration</u> Pour tout n, soit $g_n = f \wedge f_n$.
La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers f. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} I(g_n) = I(f)$
On a alors $I(f) \leq \lim\limits_{n\to\infty} I(f_n)$.

<u>Définition</u> On désigne par $S^{\uparrow}$ l'ensemble des fonctions f sur Ω qui s'écrit comme la limite d'une suite croissante $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions dans S telle que $\lim\limits_{n\to\infty} I(f_n)$. On désigne par $I(f)$ cette limite.

<u>Proposition</u> L'application $I : S^{\uparrow} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est bien définie

<u>Démonstration</u> On utilise le lemme suivant

<u>Lemme</u> Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites croissantes de fonctions dans S.
Si $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} g_n$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} I(f_n) \leq \lim\limits_{n\to\infty} I(g_n)$

Démonstration Pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a $f_m \leq \lim\limits_{n\to\infty} g_n$.

Donc $\quad I(f_m) \leq \lim\limits_{n\to\infty} I(g_n)$.

Par passage à la limite quand $m \to \infty$, on obtient le résultat. #

Les propriétés de $S^{\uparrow}$:

(1) $S^{\uparrow}$ est stable par l'addition, de plus, $\forall\, f, g \in S^{\uparrow}$, on a
$$I(f+g) = I(f) + I(g)$$

(2) Si $f \in S^{\uparrow}$ et si $\lambda \geq 0$, alors $\lambda f \in S^{\uparrow}$. De plus, on a
$$I(\lambda f) = \lambda\, I(f).$$

(3) Si $f \leq g$ sont deux éléments dans $S^{\uparrow}$, alors $I(f) \leq I(g)$

(4) Si f et g sont deux éléments de $S^{\uparrow}$, alors $f \wedge g$ et $f \vee g$ sont dans $S^{\uparrow}$.

Théorème Si $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante de fonctions dans $S^{\uparrow}$, alors $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n \in S^{\uparrow}$, alors $I(f) = \lim\limits_{n\to\infty} I(f_n)$

Démonstration Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $(g_{n,k})_{k\geq 0}$ une suite croissante de fonctions dans S qui converge vers f_n. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$h_n = \max(g_{0,n}, \ldots, g_{n,n})$$

$$\begin{array}{cccccc}
\boxed{g_{0,0}} & g_{0,1} & g_{0,2} & \cdots & \to & f_0 \\
g_{1,0} & g_{1,1} & g_{1,2} & \cdots & \to & f_1 \\
g_{2,0} & g_{2,1} & g_{2,2} & \cdots & \to & f_2 \\
g_{3,0} & g_{3,1} & g_{3,2} & \cdots & &
\end{array}$$

C'est un élément de S. la suite $(h_n)_{n\geq 0}$ est croissante

En outre, on a
$$f_n \geq h_n \geq g_{k,n} \qquad \text{pour } k \in \{0, \ldots, n\}.$$

Donc $f \geq \lim\limits_{n\to\infty} h_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} g_{k,n} = f_k$ pour tout k

Donc $f = \lim\limits_{n\to\infty} h_n. \implies I(f) = \lim\limits_{n\to\infty} I(h_n) \leq \lim\limits_{n\to\infty} I(f_n)$

Or $f \geq f_n$ pour tout n. donc $I(f) \geq \lim\limits_{n\to\infty} I(f_n)$