Séance 8 $\qquad f \in S.\ I(f) = $ l'aire du graphe de f $\qquad$

Soit S un espace vectoriel en fonctions définies sur un ensemble $\Omega \neq \phi$

Soit $I : S \to \mathbb{R}$ une application linéaire. On suppose :

① Si $f \in S$, $f \geq 0$ alors $I(f) \geq 0$

② Si $f \in S$, $g \in S$, alors $f \wedge g \in S$

③ Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S$ est décroissante et converge vers 0, alors $\lim_{n\to\infty} I(f_n) = 0$

On définit $S^\uparrow$ comme l'ensemble des $f : \Omega \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ qui s'écrit comme la limite d'une suite croissante de fonctions dans S.

On a étendu I en une application de $S^\uparrow$ vers $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

Rappel : ① Si $f, g \in S^\uparrow$, alors $f+g$, $f \vee g$ et $f \wedge g$ sont dans $S^\uparrow$, et

$$I(f+g) = I(f) + I(g)$$

② Si $f \in S^\uparrow$, $\lambda > 0$, alors $\lambda f \in S^\uparrow$, et $I(\lambda f) = \lambda I(f)$

③ Si $f, g \in S^\uparrow$, $f \leq g$, alors $I(f) \leq I(g)$

④ Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S^\uparrow$ est croissante, $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, alors $f \in S^\uparrow$ et

$I(f) = \lim_{n\to\infty} I(f_n)$

On définit $S^\downarrow = \{-f \mid f \in S^\uparrow\}$

Si $g = -f \in S^\downarrow$, $I(g)$ est défini comme $-I(f)$.

Si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S^\downarrow$ est décroissante et converge vers g, alors $g \in S^\downarrow$ et $I(g) = \lim_{n\to\infty} I(g_n)$

§ 3

Extension de I à un plus grand espace vectoriel en fonctions.

Définition On désigne par $\tilde{S}$ l'ensemble des applications $h : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que

$$\sup_{\substack{g \in S^\downarrow \\ g \leq h}} I(g) = \inf_{\substack{f \in S^\uparrow \\ f \geq h}} I(f) \text{ dans } \mathbb{R}$$

On note cette quantité comme $I(h)$

Théorème $\tilde{S}$ est un espace vectoriel $/ \mathbb{R}$ et $I : \tilde{S} \to \mathbb{R}$ est une application linéaire.

Démonstration Si $h_1 \in \tilde{S}$, $h_2 \in \tilde{S}$, on a

$$\sup_{g_1 \in S^\downarrow,\, g_1 \leq h_1} I(g_1) + \sup_{g_2 \in S^\downarrow,\, g_2 \leq h_2} I(g_2) \leq \sup_{g \in S^\downarrow,\, g \leq h_1+h_2} I(g)$$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad \wedge$$

$$\inf_{f_1 \in S^\uparrow,\, f_1 \geq h_1} I(f_1) + \inf_{f_2 \in S^\uparrow,\, f_2 \geq h_2} I(f_2) \geq \inf_{f \in S^\uparrow,\, f \geq h_1+h_2} I(f)$$

On a donc l'égalité partout, donc $h_1+h_2 \in \tilde{S}$, et $I(h_1+h_2) = I(h_1)+I(h_2)$.

De façon similaire, on peut montrer que si $h \in \tilde{S}$, $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, $\lambda h \in \tilde{S}$ et $I(\lambda h) = \lambda I(h)$.

Enfin, si $h \in \tilde{S}$, alors

$$\sup_{\substack{g \in S^{\downarrow} \\ g \leq -h}} I(g) \overset{f=-g}{=} \sup_{\substack{f \in S^{\uparrow} \\ f \geq h}} I(-f) = -\inf_{\substack{f \in S^{\uparrow} \\ f \geq h}} I(f) \overset{h\in\tilde{S}}{=} -\sup_{\substack{g \in S^{\downarrow} \\ g \leq h}} I(g)$$

$$\overset{f=-g}{=} -\sup_{\substack{f \in S^{\uparrow} \\ f \geq -h}} I(-f) = \inf_{\substack{f \in S^{\uparrow} \\ f \geq -h}} I(f).$$

Donc $-h \in \tilde{S}$ et $I(-h) = -I(h)$. ✧

(Levi Beppo)
<u>Théorème</u> Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante (resp. décroissante) de fonctions dans $\tilde{S}$ qui converge vers une fonction $h : \Omega \to \mathbb{R}$. Si $\lim_{n\to\infty} I(h_n) < +\infty$ (resp. $\lim_{n\to\infty} I(h_n) > -\infty$), alors $h \in \tilde{S}$ et $I(h) = \lim_{n\to\infty} I(h_n)$.

<u>Démonstration</u> Il suffit de traiter le cas où $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $\lim_{n\to\infty} I(h_n) < +\infty$ (pour l'autre cas, on peut considérer $(-h_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

Quitte à remplacer h_n par $h_n - h_0$, on peut supposer $h_0 = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, on choisit $f_n \in S^{\uparrow}$ tel que

$h_n - h_{n-1} \leq f_n$, et $I(h_n - h_{n-1}) \geq I(f_n) - \frac{\varepsilon}{2^n}$ (f_n est forcément ≥ 0)

On a alors $h_n \leq f_1 + \dots + f_n$ et $I(h_n) \geq I(f_1) + \dots + I(f_n) - \varepsilon$

Soit $f = \sum_{n\geq 1} f_n$. On a $f \in S^{\uparrow}$ et $I(f) = \sum_{n\geq1} I(f_n)$

En outre, $f \geq h$ et $\lim_{n\to\infty} I(h_n) \geq I(f) - \varepsilon$. Cela montre que

$$\inf_{f\in S^{\uparrow},\, f\geq h} I(f) \leq \lim_{n\to\infty} I(h_n).$$

Pour l'autre côté (plus facile), on peut choisir $g_n \in S^{\downarrow}$, $g_n \leq h_n$ ($\leq h$) et $I(g_n) \geq I(h_n) + \varepsilon$. Pour n assez grand, on a

$$I(g_n) \geq \lim_{n\to\infty} I(h_n) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc $\sup_{g\in S^{\downarrow},\, g\leq h} I(g) \geq \lim_{n\to\infty} I(h_n)$.

On en déduit alors $h \in \tilde{S}$ et $I(h) = \lim_{n\to\infty} I(h_n)$.

§4 Critère de $\tilde{S}$

① Une fonction $h \in \tilde{S}$ si et seulement si on peut trouver deux suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S^{\uparrow}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S^{\downarrow}$ telle que

$$g_0 \leq g_1 \leq \cdots \leq g_n \leq \cdots \leq h \leq \cdots \leq f_n \leq f_{n-1} \leq \cdots \leq f_0$$

($(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante)

et que $\lim_{n\to\infty} I(g_n) = \lim_{n\to\infty} I(f_n)$

② Si $h : \Omega \to \mathbb{R}$ est dominée par une fonction dans $\tilde{S}$ (il existe $h' \in \tilde{S}$ telle que $|h| \leq h'$), alors $h \in \tilde{S}$ si et seul^t s'il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S^{\uparrow}$ décroissante, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S^{\downarrow}$ croissante, telles que $f_n \geq h \geq g_n$ pour tout n et $\lim_{n\to\infty} I(f_n - g_n) = 0$.

③ $\tilde{S}$ contient toute fonction f dans $S^{\uparrow} \cup S^{\downarrow}$ telle que $I(f) \in \mathbb{R}$.

④ Si f et g sont deux fonctions dans $\tilde{S}$, alors $f \vee g$, $f \wedge g$ et $|f|$ sont tous dans $\tilde{S}$.

<u>Théorème</u> (Fatou) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions positives dans $\tilde{S}$. Si $\liminf_{n\to\infty} I(f_n) < +\infty$, alors $\liminf_{n\to\infty} f_n \in \tilde{S}$, et

$$I(\liminf_{n\to\infty} f_n) \leq \liminf_{n\to\infty} I(f_n)$$

<u>Démonstration</u> Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $g_n = \inf_{m\geq n} f_n = \lim_{k\to\infty} f_m \wedge \cdots \wedge f_{m+k}$

C'est la limite d'une suite décroissante dans $\tilde{S}$.

En outre, on a $I(f_m \wedge \cdots \wedge f_{m+k}) \geq 0$

D'après le théorème de Beppo Levi, on a $g_n \in \tilde{S}$ et

$$I(g_n) = \lim_{k\to\infty} I(f_m \wedge \cdots \wedge f_{m+k}) \leq I(f_n)$$

La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $\lim_{n\to\infty} I(g_n) \leq \liminf_{n\to\infty} I(f_n) < +\infty$

Donc (encore par Beppo Levi)

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \liminf_{n\to\infty} f_n \in \tilde{S} \quad \text{et} \quad I(\liminf_{n\to\infty} f_n) = \lim_{n\to\infty} I(g_n) \leq \liminf_{n\to\infty} I(f_n)$$

Théorème (Convergence dominée)

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions dans $\tilde{S}$ qui converge vers une fonction f. S'il existe $g \in \tilde{S}$ telle que $|f_n| \leq g$ pour tout n, alors $f \in \tilde{S}$ et on a $I(f) = \lim_{n\to\infty} I(f_n)$

Démonstration On applique le théorème de Fatou à $(g-f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g+f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour obtenir $f \in \tilde{S}$ et

$$I(g-f) \leqslant \liminf_{n\to\infty} I(g-f_n) = I(g) - \limsup_{n\to\infty} I(f_n)$$

$$I(g+f) \leqslant \liminf_{n\to\infty} I(g+f_n) = I(g) + \liminf_{n\to\infty} I(f_n)$$

On a alors $\liminf_{n\to\infty} I(f_n) \geqslant I(f) \geqslant \limsup_{n\to\infty} I(f_n)$

On obtient donc la convergence de $(I(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $\lim_{n\to\infty} I(f_n) = I(f)$ ※

§5 Norme L^1

Remarque $\tilde{\tilde{S}} = \tilde{S}$

Pour $f \in \tilde{S}$, on définit $\|f\|_{L^1} = I(|f|)$.

Propriétés ① $\|f\|_{L^1} \geqslant 0$ pour tout $f \in \tilde{S}$

② Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in \tilde{S}$, $\|\lambda f\|_{L^1} = |\lambda| \cdot \|f\|_{L^1}$

③ $\|f+g\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^1} + \|g\|_{L^1}$. ← implique $\big|\|f\|_{L^1} - \|g\|_{L^1}\big| \leqslant \|f-g\|_{L^1}$

On dit qu'une fonction $f \in \tilde{S}$ est négligeable si $\|f\|_{L^1} = 0$.

On désigne par $\tilde{S}_0$ l'ensemble des fonctions négligeables.

~~Théorème~~ Suite de Cauchy. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $\tilde{S}$.

On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si $\lim_{N\to+\infty} \sup_{\substack{(n,m)\in\mathbb{N}^2 \\ n\geqslant N,\, m\geqslant N}} \|f_n - f_m\|_{L^1} = 0$

Théorème Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de fonctions dans $\tilde{S}$. Il existe $f \in \tilde{S}$ tel que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^1} = 0$. En outre, f est unique à une fonction dans $\tilde{S}_0$ près.

Démonstration Montrons d'abord l'unicité. Si f et g sont deux fonctions dans $\tilde{S}$ vérifiant la propriété, alors la relation

$$\|f-g\|_{L^1} \leqslant \|f_n - f\|_{L^1} + \|f_n - g\|_{L^1}$$

montre que $f-g \in \tilde{S}_0$ par passage à la limite quand $n \to +\infty$.

Pour montrer le théorème, il suffit de le montrer pour n'importe quelle sous-suite

On peut donc supposer $\|f_n - f_{n-1}\|_{L^1} \leq \frac{1}{2^n}$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n := \sum_{i \geq n} |f_{i+1} - f_i| \in \tilde{S}$ et $\|\varphi_n\|_{L^1} \leq \frac{1}{2^n}$

Soit $g_n = f_n - \varphi_n$. $h_n = f_n + \varphi_n$.

$(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. $g_n \leq f_n \leq h_n$

$\rightarrow$ $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Converge vers une fonction que l'on note comme $f \in \tilde{S}$

On a $g_n \leq f \leq h_n$ et $|f - f_n| \leq |g_n - h_n| = 2\varphi_n$.

$\rightarrow$ $\|f - f_n\|_{L^1} \leq 2\, I(\varphi_n) = \frac{1}{2^{n-1}}$

Par passage à la limite quand $n \to \infty$, on obtient le résultat.

<u>Définition</u> On désigne par $L^1(\Omega, I)$ (ou simplement $L^1(\Omega)$) le sous-ensemble des fonctions f dans $\tilde{S}$ telle qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans S vérifiant $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^1} = 0$. Si $f \in L^1(\Omega)$, on dit que f est <u>intégrable</u>

<u>Remarque</u> ~~Le théorème précédent montre que~~, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$ et si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction dans $\tilde{S}$ telle que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^1} = 0$ alors $f \in L^1(\Omega)$.

<u>§6 Exemples</u>

On dit que $h : \Omega \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann si

$$\sup_{g\in S,\, g\leq h} I(g) = \inf_{f\in S,\, f\geq h} I(f) \in \mathbb{R}$$

On désigne par $L^1_R(\Omega)$ l'ensemble des fonctions intégrable au sens de Riemann. (c'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$).

<u>Fait</u>: On a $S \subset L^1_R(\Omega) \subset L^1(\Omega)$.

<u>Propositi</u>on Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue à support compact, alors $f \in L^1_R(\mathbb{R})$

<u>Démonstration</u> Soit $]a, b]$ un intervalle contenant $\mathrm{supp}(f)$. Soit $r = b - a$.

Pour tout $n \geq 1$ soit

$$g_n = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in]a+\frac{i-1}{n}r,\, a+\frac{i}{n}r]} f(x) \cdot \mathbb{1}_{]a+\frac{i-1}{n}r,\, a+\frac{i}{n}r]} \in S$$

$$h_n = \sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in]a+\frac{i-1}{n}r,\, a+\frac{i}{n}r]} f(x) \cdot \mathbb{1}_{]a+\frac{i-1}{n}r,\, a+\frac{i}{n}r]} \in S.$$

On a $h_n \leq f \leq g_n$. et $\|g_n - h_n\| \leq (b-a) \sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \\ |x-y|\leq \frac{r}{n}}} |f(x) - f(y)|$.

Par la continuité uniforme (démontrée dans CCI) on obtient le résultat.