On fixe un entier $d \geq 1$. Soit S l'espace vectoriel de fonctions sur $\mathbb{R}^d$ engendré par les fonctions de la forme

eg. $\mathbb{1}_{]a_1,b_1]\times\cdots\times]a_d,b_d]} \in S$

$$f_1\otimes\cdots\otimes f_d : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1,\cdots,x_d) \longmapsto \prod_{i=1}^{d} f_i(x_i)$$

où chaque $f_i \in L^1(\mathbb{R})$.

Notation Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on désigne par $\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt$ le nombre $I(f)$.

On définit une application linéaire $I : S \to \mathbb{R}$ telle que
$$I(f_1\otimes\cdots\otimes f_d) = \prod_{i=1}^{d}\int_{\mathbb{R}} f_i(x_i)\,dx_i$$

Exercice S est stable par $\wedge$, et $I : S \to \mathbb{R}$ est une application d'intégration.

On désigne par $L^1(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions intégrable par rapport à $I : S \to \mathbb{R}$.

Notation Si $F \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on désigne par $\int_{\mathbb{R}^d} F(\vec{x})\,d\vec{x}$ le nombre $I(F)$.

ou $\int_{\mathbb{R}^d} F(x_1,\cdots,x_d)\,dx_1\cdots dx_d$

Théorème (Fubini)

Si F est une fonction dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, alors
$$\int_{\mathbb{R}^d} F(x_1,\cdots,x_d)\,dx_1\cdots dx_d = \underbrace{\int_{\mathbb{R}}\cdots\Big(\int_{\mathbb{R}}}_{d\text{ copie}} F(x_1,\cdots,x_d)\,dx_1\Big)\cdots dx_d.$$

Démonstration Le cas où $F \in S$ est immédiat. Pour le cas général, on prend une suite dans S qui converge vers F. Par passage à la limite on obtient le résultat. ✲

La propriété d'invariance par translation.

Prop. Soit F une fonction dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. Pour tout $P \in \mathbb{R}^d$, on désigne par $\tau_P F$ la fonction de $\mathbb{R}^d$ vers $\mathbb{R}$ qui envoie $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$ en $F(\vec{x}+P)$. Alors $\tau_P F \in L^1(\mathbb{R}^d)$, et on a $I(\tau_P F) = I(F)$. ✲

Dans la suite, on désigne par $C_c(\mathbb{R}^d)$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}^d$ qui sont à support compact.

Chaque fonction dans $C_c(\mathbb{R}^d)$ est intégrable au sens de Riemann. Donc on a $C_c(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R})$.

Dans le partiel, on démontrera la propriété suivante :

<u>Proposition</u> Si $\varphi : C_c(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application linéaire telle que $\varphi(f) \geqslant 0$ pour toute fonction positive dans $C_c(\mathbb{R}^d)$, alors φ est une application d'intégration sur $C_c(\mathbb{R}^d)$.

<u>Théorème</u> Soit $\varphi : C_c(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ une application linéaire qui vérifie les propriétés suivantes :

① $\forall f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, $f \geqslant 0$, on a $\varphi(f) \geqslant 0$

② $\forall f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, $\forall p \in \mathbb{R}^d$, on a $\varphi(\tau_p f) = \varphi(f)$.

Alors il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que $\varphi = CI$.

<u>Démonstration</u> Soit $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$, $g \geqslant 0$ mais $g \not\equiv 0$.

Pour tout $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, soit $h_{f.g} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ défini comme

$$h_{f.g}(x, y) = \frac{f(x)\, g(x+y)}{I(g)}$$

$h_{f.g}$ est dans $C_c(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$.

<u>Notation</u> Pour $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$, $\varphi(g)$ sera noté comme $\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\, \varphi(dx)$.

Alors $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} h_{f.g}(x, y)\, dx\, \varphi(dy)$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{I(g)} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, g(x+y)\, \varphi(dy)\, dx = \frac{1}{I(g)} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \underset{\varphi(\tau_x g)}{\underset{\parallel}{\varphi(g)}}\, dx$$

$$= \frac{\varphi(g)}{I(g)} \cdot I(f).$$

De même, $\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} h_{f.g}(x.y)\, dx\, \varphi(dy)$

$$= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} h_{f.g}(x.y)\, dx\right)\varphi(dy)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\frac{1}{I(g)}\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\, g(x)\, dx\right)\varphi(dy)$$

$$= \frac{1}{I(g)}\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\,\varphi(dy)\, dx$$

$$= \frac{1}{I(g)}\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\,\varphi(f^\sigma)\, dx \qquad \text{où } f^\sigma(y) = f(-y).$$

$$= \varphi(f^\sigma).$$ On obtient alors $\varphi(f^\sigma) = \dfrac{\varphi(g)}{I(g)} I(f)$

Quitte à remplacer f par f^σ, on obtient

$$\varphi(f) = \frac{\varphi(g)}{I(g)} I(f^\sigma) = \frac{\varphi(g)}{I(g)} I(f)$$

Donc $\varphi(f) = C\, I(f)$ pour tout f avec $C = \dfrac{\varphi(g)}{I(g)}$ ✱

<u>Corollaire</u> Si $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est une application linéaire inversible, alors pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(Ax)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\cdot|\det A|^{-1}\, dx$$

<u>Démonstration</u> Il suffit de montrer que $\varphi : C_c(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \longmapsto I(f(A\cdot))$

est invariant par translation.

En effet, si $P \in \mathbb{R}^d$, alors

$$\varphi(\tau_P f) = \int_{\mathbb{R}^d} (\tau_P f)(Ax)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(Ax+P)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(A(x+A^{-1}P))\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \tau_{A^{-1}P}(f\circ A)(x)\, dx$$

$$= I(f\circ A) = \varphi(f).$$

On en déduit que φ est proportionnel à I.

Pour déterminer la proportion, on calcule $\varphi(\mathbb{1}_{[0,1]^n})$

$\mathbb{1}_{[0,1]^n} \circ A$ est $\underbrace{\text{un paralelograme}}_{\text{la fonction d'indicatrice d'}}$ délimité par $(Ae_i)_{i=1}^{d}$.

le volume du paralelograme est $|\det A|$. La démonstration est donc achevé.

$\#$

Exemple de fonctions intégrables:

- Toute fonction continue à support compact est dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.
  (car intégrable au sens de Riemann).
- Si U est un ouvert borné dans $\mathbb{R}^d$. alors $\mathbb{1}_U$ est intégrable
- Si F est un fermé borné dans $\mathbb{R}^d$. alors $\mathbb{1}_F$ est intégrable.
- Si $f \in L^1(\mathbb{R})$. $h \in L^1(\mathbb{R})$ bornée. alors $fh \in L^1(\mathbb{R})$.

Théorème (Continuité sous signe intégrale).

Soit E un espace métrique $F : \mathbb{R}^d \times E \to \mathbb{R}$ une application.

On suppose que ① $\forall x \in \mathbb{R}^d$. l'application $(P \in E) \mapsto F(x,P)$ est continue

② $\forall P \in E$. l'application $(x \in \mathbb{R}^d) \longmapsto F(x.P)$ est intégrable

③ Il existe $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que

$\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall P \in E, \quad |F(x,P)| \leq f(x)$

Alors la fonction
$$h : E \to \mathbb{R}, \quad h(P) := \int_{\mathbb{R}^d} F(x.P)\, dx$$
est continue.

Démonstration Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers P.

On a $F(x,P_n) \to F(x.P)$ et $|F(x,P_n)| \leq f(x)$

Par le théorème de convergence dominée, on obtient le résultat.

Théorème (Dérivabilité sous signe intégrale)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $F : \mathbb{R}^d \times U \to \mathbb{R}$ une applicat°

On suppose ① $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $(P \in U) \mapsto F(x, P)$ $v \in \mathbb{R}^n$

est dérivable dans la direction de v

② $\forall P \in E$, $(x \in \mathbb{R}^d) \mapsto F(x, P)$ est intégrable

③ Il existe une foncto $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ t.q.

$\forall P, \forall x$ $\quad |\partial_v F(x, P)| \leq g(x)$

Alors la fonction $h : U \to \mathbb{R}$

$$h(P) = \int_{\mathbb{R}^d} F(x, P)\, dx$$

est dérivable dans la direction de h. et on a

$$\partial_v h(P) = \int_{\mathbb{R}^d} \partial_v F(x, P)\, dx .$$