Université Joseph Fourier
L2 MAT233
2013-2014

Contrôle de connaissance
du 09 octobre 2013 (corrigé)

Première partie

Soit f la fonction sur $\mathbb{R}^2$ définie comme $f(x,y) = \max(x-y,0)$

1. Montrer que f est une fonction continue.
Solution. La fonction de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui envoie (x,y) en $x-y$ est continue car elle est une application linéaire. Comme $|.| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, on obtient que l'application composée $(x,y) \mapsto |x-y|$ est une fonction continue. Enfin, comme $\max(x-y,0) = ((x-y)+|x-y|)/2$, on obtient que f est une fonction continue.

2. Montrer que, pour tous $P, h \in \mathbb{R}^2$, la limite

$$\partial_h^+ f(P) := \lim_{t\in]0,+\infty[,\ t\to 0} \frac{f(P+th)-f(P)}{t}$$

existe dans $\mathbb{R}$. Déterminer cette limite.
Solution. On désigne par U_1 (resp. U_2) l'ensemble des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x-y>0$ (resp. $x-y<0$). Ces ensembles sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$. En outre, la restriction de f à U_1 et à U_2 sont des application linéaire. Par conséquent, la fonction f est différentiable sur $U_1 \cup U_2$. En outre, pour tout $P \in U_1$ (resp. $P \in U_2$) et tout $h=(h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$, on a $\partial_h^+ f(P) = h_1 - h_2$ (resp. $\partial_h^+ f(P) = 0$). Il restre à traiter le cas où P est dans la diagonale $\Delta = \{(x,x)\,|\,x \in \mathbb{R}\}$. Soient P un point de Δ et $h \in \mathbb{R}^2$. Si h appartient à U_1 (resp. U_2), alors pour tout $t>0$, le point $P+th$ appartient à U_1 (resp. U_2). On en déduit $f(P+th) = f(P)+tf(h)$ et donc $\partial_h^+ f(P) = f(h)$. Enfin, si $h \in \Delta$, alors pour tout $t>0$ on a $P+th \in \Delta$ et donc $\partial_h^+ f(P) = 0$ puisque la restriction de f à Δ s'annule. Enfin on obtient $\partial_h^+ f(P) = f(h)$.

3. Déterminer l'ensemble U des point $P \in \mathbb{R}^2$ où la fonction f est différentiable.
Solution. On a vu dans la question précédente que la fonction f est différentiable en $U_1 \cup U_2$. Pour tout $P \in \Delta$, si la fonction f était différentiable en P, alors on aurait $Df(P)(h) = \partial_h^+ f(P) = f(h)$ pour tout $h \in \mathbb{R}^2$. Cependant, la fonction f n'est pas linéaire. Cela est absurde (la différentielle en un point d'une fonction différentiable est toujours une fonction linéaire). Cela montre que la fonction f n'est pas différentiable sur Δ. On obtient alors $U = U_1 \cup U_2$.

4. Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Solution. Comme la fonction U s'écrit comme la réunion de deux ouverts dans $\mathbb{R}^2$, il est lui-même un ouvert.

Deuxième partie

On considère la fonction f définie sur le domaine $D = [0,1]\times[0,1]$ comme

$$f(x,y) = (1-x)(1-y)(x+y-1).$$

5. Montrer que f est une fonction continue sur D.
Solution. La fonction f est continue car produit de fonctions continues.

6. Montrer que la fonction f atteint son maximum sur D en un point de D°.
Solution. f est continue sur D et elle atteint donc son max sur D : on observe que $f \leq 0$ sur $D \setminus D^\circ$ mais $f(x,y) > 0$ pour quelque $(x,y) \in D^\circ$ (par exemple $f(4/5,1/2) > 0$). Cela montre que le max ne peut pas être sur $D \setminus D^\circ$ et est donc forcement dans D°.

7. Montrer que la fonction f est différentiable sur l'intérieur de D. Déterminer sa différentielle.
Solution. On peut calculer les dérivées partielles de la fonction f. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (1-y)(1-2x-y+1),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = (1-x)(1-2y-x+1).$$

Ce sont des fonctions continues sur D. On obtient alors que la fonction f est différentiable sur D°, et on a

$$Df(x,y)(h_1,h_2) = (1-y)(1-2x-y+1)h_1 + (1-x)(1-2y-x+1)h_2.$$

8. Déterminer tous les points critiques de laréstriction de f à D°.
Solution. On doit résoudre dans D° le système d'équations

$$\begin{cases} (1-y)(1-2x-y+1) = 0, \\ (1-x)(1-2y-x+1) = 0. \end{cases}$$

Comme dans D° on a que $x \neq 1$ et $y \neq 1$ ce système a une seule solution $(2/3, 2/3)$.

9. Trouver le maximum global de la fonction f.
Solution. On a vu que f atteint son sur un point de D° et un tel point doit être un point critique, donc $\max f = f(2/3, 2/3) = (1/3)^3$.

10. Application : on admet que l'aire d'un triangle de côtés a, b, c est déterminé par la formule de Héron

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

où $p = (a+b+c)/2$ est le demi-périmètre du triangle. Déterminer l'aire maximale d'un triangle de périmètre 2.
Solution. Si le périmètre d'un triangle de de côtés a, b, c est 2, on a $p = 1$ et $c = 2-a-b$. On observe que $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$ (si par exemple on suppose $a \geq 1$ on trouve $b + c \leq a$ qui est une contradiction par l' inégalité triangulaire). On doit donc chercher le maximum sur D° de la fonction

$$g(a,b) = \sqrt{(1-a)(1-b)(a+b-1)} = \sqrt{f(a,b)}$$

(f étant la fonction des points précedents de l'exercice). Comme la racine carré est une fonction croissante on a que

$$\max_{(x,y)\in D^\circ} g(x,y) = \sqrt{\max_{(x,y)\in D^\circ} f(x,y)} = (1/3)^{3/2}.$$

Troisième partie

Soit f une application de $\mathbb{R}^d$ vers $\mathbb{R}$, où $d \geqslant 1$ est un entier. Pour tout sous-ensemble A de $\mathbb{R}^d$, on dit que la fonction f est *uniformément continue* sur A si

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{\substack{(x,y)\in A^2 \\ \|x-y\|_{\sup} < \delta}} |f(x) - f(y)| = 0.$$

11. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$. Montrer que, si la fonction f est uniformément continue sur A, alors sa restriction à A est une fonction continue.
Solution. Soit P un élément de A. Pour tout $\delta > 0$, on a

$$0 \leqslant \sup_{\substack{Q\in A\\ \|Q-P\|_{\sup}<\delta}} |f(P)-f(Q)| \leqslant \sup_{\substack{(x,y)\in A^2\\ \|x-y\|_{\sup}<\delta}} |f(x)-f(y)|.$$

Par passage à la limite quand $\delta \to 0$, on obtient que la fonction f est continue en P. Comme P est arbitraire, la fonction f est continue sur A.

12. On suppose que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$. Montrer que, si A est un sous-ensemble borné et fermé de $\mathbb{R}^d$, alors la fonction f est uniformément continue sur A. On peut utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass.
Solution. On suppose que f n'est pas uniformément continu. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et deux suites de points $(P_n)_{n\geqslant 0}$ et $(Q_n)_{n\geqslant 0}$ dans A telles que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|P_n - Q_n\|_{\sup} = 0$ et que $|f(P_n)-f(Q_n)| \geqslant \varepsilon$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Comme A est borné, les deux suites sont bornées. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, quitte à remplacer ces deux suites par leurs sous-suites, on peut les supposer convergeantes vers P et Q dans $\mathbb{R}^d$ respectivement. En outre, comme A est un fermé, on obtient que P et Q sont dans A. Comme la fonction f est continue, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f(P_n) = f(P), \quad \lim_{n\to+\infty} f(Q_n) = f(Q).$$

Par passage à la limite quand $n \to +\infty$, la relation $|f(P_n) - f(Q_n)| \geqslant \varepsilon$ montre que $|f(P)-f(Q)| \geqslant \varepsilon$. Cependant, comme $\lim_{n\to} \|P_n - Q_n\|_{\sup} = 0$, on obtient que les suites $(P_n)_{n\geqslant 0}$ et $(Q_n)_{n\geqslant 0}$ convergent vers la même limite (c'est-à-dire $P = Q$). Cela est absurde.

13. On suppose que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose en plus que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M > 0$ tel que

$$|f(P)-\ell| < \varepsilon \text{ quel que soit } P \in \mathbb{R}^d \text{ vérifiant } \|P\|_{\sup} > M.$$

Montrer que la fonction f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$.
Solution. Pour tout $\varepsilon > 0$, on choisit $M > 0$ tel que $|f(P)-\ell| < \varepsilon$. En particulier, pour tous les points P, Q dnas $\mathbb{R}^d$, $\|P\|_{\sup} > M$, $\|Q\|_{\sup} > M$, on a $|f(P)-f(Q)| < 2\varepsilon$. Soit A l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^d$ tels que $\|x\|_{\sup} \leqslant M+2$. Soit $\delta \in]0,1[$. Pour tout couple (x,y) de points dans $\mathbb{R}^d$ tels que $\|x-y\|_{\sup} < \delta$, ou bien x et y sont tous les deux dans A, ou bien on a $\|x\|_{\sup} > M$ et $\|y\|_{\sup} > M$. On obtient alors

$$\sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\\ \|x-y\|_{\sup}<\delta}} |f(x)-f(y)| \leqslant \max(2\varepsilon, \sup_{\substack{(x,y)\in A^2\\ \|x-y\|_{\sup}<\delta}} |f(x)-f(y)|).$$

Par passage à la limite quand $\delta \to 0$, on obtient

$$\sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\\ \|x-y\|_{\sup}<\delta}} |f(x)-f(y)| \leqslant 2\varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, on obtient le résultat.