Université Joseph Fourier
L2 MAT233
2013-2014

Contrôle de connaissance
du 06 novembre 2013

Les documents sont autorisés. Cependant, tout appareil électronique est interdit. Les trois parties de l'épreuve sont indépendantes.

Première partie

On désigne par I l'application d'intégration usuelle sur $\mathbb{R}$. Soit f une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$ (i.e. $\mathbb{1}_{]a,b]}f$ est intégrable pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leqslant b$). Si a et b sont deux nombres réels, $a \leqslant b$, on définit

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t := I(\mathbb{1}_{]a,b]}f), \quad \int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t := -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite

$$\lim_{h\to 0} \int_a^{a+h} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On peut utiliser le théorème de convergence dominée.
Solution. Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres positifs qui converge vers 0. La suite de fonctions $(\mathbb{1}_{]a,a+h_n]}f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. En outre, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|\mathbb{1}_{]a,a+h_n]}f| \leqslant |f|$. D'après le théorème de convergence dominée, on obtient $\lim_{n\to+\infty} I(\mathbb{1}_{]a,a+h_n]}f) = 0$, ou en d'autres termes,

$$\lim_{h\to 0+} \int_a^{a+h} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Considérons maintenant une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres négatifs qui converge vers 0. La suite de fonctions $(\mathbb{1}_{]a+h_n,a]}f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)\mathbb{1}_{\{a\}}$. En outre, cette suite est aussi dominée par $|f|$. D'après le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} I(\mathbb{1}_{]a+h_n,a]}f) = f(a)I(\mathbb{1}_{\{a\}}) = 0$$

puisque $\mathbb{1}_{\{a\}}$ est une fonction négligeable. On en déduit

$$\lim_{h\to 0-} \int_a^{a+h} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

On obtient enfin

$$\lim_{n\to 0} \int_a^{a+h} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

2. On fixe dans la suite un nombre réel a et on définit une fonction F sur $\mathbb{R}$ comme

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que la fonction F est continue.
Solution. D'après la question **1.**, on a

$$\lim_{h\to 0} F(x+h) - F(x) = \lim_{h\to 0} \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

La fonction F est donc continue.

3. Montrer que, si la fonction f est continue, alors la fonction F est différentiable, et on a $F' = f$.
Solution. Soient x et h deux nombres réels. On a

$$F(x+h) - F(x) - f(x)h = \int_x^{x+h} f(t) - f(x)\,\mathrm{d}t.$$

Donc

$$|F(x+h) - F(x) - f(x)h| \leqslant \sup_{|t-x|\leqslant|h|} |f(t) - f(x)| \cdot |h|.$$

Comme f est continue, on a

$$\lim_{h\to 0} \sup_{|t-x|\leqslant|h|} |f(t) - f(x)| = 0.$$

On obtient donc

$$F(x+h) - F(x) - f(x)h = o(h).$$

Cela montre que la fonction F est différentiable en x et $F'(x) = f(x)$.

Deuxième partie

Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie comme $\phi(x) = \exp(-x^2)$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie comme $f(x,y) := \exp(-x^2 - y^2)$.

4. Montrer que ϕ est une fonction continue et bornée.
Solution. La fonction ϕ est le composé de la fonction exponentielle et un polynôme, qui sont tous les deux continus, donc la fonction ϕ est aussi continue. En outre, comme $-x^2 \leqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $0 \leqslant \phi(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant 1$. La fonction ϕ est donc bornée.

5. Montrer que ϕ est un élément dans $L^1(\mathbb{R})$.
Solution. Comme la fonction ϕ est continue, elle est toujours localement intégrable. En outre, comme ϕ est une fonction positive, d'après le théorème de Beppo Levi, pour montrer l'intégrabilité de la fonction ϕ, il suffit de vérifier que la fonction

$$\Psi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}_+, \quad \Psi(a) = \int_{-a}^{a} \phi(t)\,\mathrm{d}t$$

est bornée (on utilise le fait que la suite $(\mathbb{1}_{]-n,n]} f)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante est converge vers f). Cette fonction est évidemment croissante. En outre, pour $a \geqslant 1$, on a

$$\Psi(a) = \Psi(1) + \int_{-a}^{-1} \phi(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^a \phi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \Psi(1) + \int_{-a}^{-1} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t + \int_1^a \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t,$$

où on a utilisé le fait que $t^2 \geqslant |t|$ dès que $|t| \geqslant 1$. Enfin, on obtient

$$\Psi(a) \leqslant \Psi(1) + [\mathrm{e}^t]_{-a}^{-1} + [-\mathrm{e}^{-t}]_1^a = \Psi(1) + 2(\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-a}) \leqslant \Psi(1) + 2\mathrm{e}^{-1}.$$

6. En déduire que f est un élément dans $L^1(\mathbb{R}^2)$ et que

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \Big(\int_{\mathbb{R}} \phi(t)\,\mathrm{d}t\Big)^2.$$

Solution. La fonction f s'écrit sous la forme $f(x,y) = \phi(x)\phi(y)$. Comme $\phi \in L^1(\mathbb{R})$, on obtient $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, et on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = I(f) = I(\phi)^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} \phi(t)\,\mathrm{d}t\right)^2$$

7. Soit $J = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0\}$. Montrer que $\mathbb{1}_J$ est une fonction négligeable.
Solution. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, soit $J_n = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leqslant x \leqslant n\}$. On a $\mathbb{1}_{J_n}(x,y) = \mathbb{1}_{[0,n]}(x)\mathbb{1}_{\{0\}}(y)$. Donc

$$I(\mathbb{1}_{J_n}) = I([0,n])I(\{0\}) = 0.$$

Enfin, comme $(\mathbb{1}_{J_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et converge vers $\mathbb{1}_J$, on obtient que

$$I(\mathbb{1}_J) = \lim_{n\to+\infty} I(\mathbb{1}_{J_n}) = 0.$$

La fonction $\mathbb{1}_J$ est donc négligeable.

8. Soit U le complémentaire de J dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que U est un ouvert dans $\mathbb{R}^2$.
Solution. Il suffit de montrer que J est un fermé dans $\mathbb{R}^2$. Soient π_1 et π_2 les projections de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ sur les deux coordonnées respectivement. Ce sont des applications linéaires entre des espaces vectoriels de dimension finie, donc sont des application continue. Par conséquent,

$$J = \pi_1^{-1}([0,+\infty[) \cap \pi_2^{-1}(\{0\})$$

est un sous-ensemble fermé.

9. Montrer que $\mathbb{1}_U f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ et

$$\int_U f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Solution. Comme U est un ensemble ouvert et comme $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, on obtient $\mathbb{1}_U f \in L^1(\mathbb{R}^2)$. En outre, comme J est négligeable et comme f est positive et bornée supérieurement par 1, on a

$$I(\mathbb{1}_J f) \leqslant 1 I(\mathbb{1}_J) = 0.$$

On obtient donc $I(f) = I(\mathbb{1}_U f)$.

10. Montrer que l'application $H :]0,+\infty[\times]0,2\pi[\to U$ qui envoie (r,θ) en $(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ est une bijection différentiable. Déterminer la matrice jacobienne de H.
Solution. Les fonctions sin et cos sont différentiables. La fonction H s'exprime comme une composition de fonctions linéaires et ces fonctions, donc est elle même différentiables. En outre, si $H(r,\theta) = H(r',\theta')$, on a $r\cos(\theta) = r'\cos(\theta')$ et $r\sin(\theta) = r'\sin(\theta')$. Donc

$$r^2 = (r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2 = (r'\cos(\theta'))^2 + (r'\sin(\theta'))^2 = (r')^2.$$

On en déduit $r = r'$ puisque r et r' sont strictement positif. De plus, on a $\cos(\theta) = \cos(\theta')$ et $\sin(\theta) = \sin(\theta')$. Comme θ et θ' prennent valeurs dans $]0,2\pi[$, on a $\theta = \theta'$.
La matrice jacobienne de H est

$$J_H(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

11. En utilisant la formule

$$\int_U f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{]0,+\infty[\times]0,2\pi[} (f\circ H)(r,\theta)\cdot|\text{dét}\,J_H(r,\theta)|\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,$$

déterminer la valeur de $\displaystyle\int_U f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Solution. On a $|\text{dét}\,J_H(r,\theta)| = r$. Donc

$$\int_{]0,+\infty[\times]0,2\pi[} (f\circ H)(r,\theta)\cdot|\text{dét}\,J_H(r,\theta)|\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_{]0,+\infty[\times]0,2\pi[} \mathrm{e}^{-r^2} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

Par conséquent,

$$\int_U f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\pi\int_0^{+\infty} r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r = \pi[-e^{-r^2}]_0^{+\infty} = \pi.$$

12. Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \phi(t)\,\mathrm{d}t$.

Solution. D'après la question **6.**, on a $I(\phi) = \sqrt{\pi}$.

13. Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2-t}\,\mathrm{d}t$.

Solution. On écrit $-t^2-t$ sous la forme $-(t+1/2)^2+1/4$ et obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2-t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{1/4}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(t+1/2)^2}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{1/4}I(\phi) = \mathrm{e}^{1/4}\sqrt{\pi},$$

où on utilise l'invariance de l'intégrale par la translation.

Troisième partie

Soit $d \geqslant 1$ un entier. On désigne par $C_c(\mathbb{R}^d)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions continues à support compact définies sur $\mathbb{R}^d$. Le but de cette partie est de démontrer que toute forme linéaire positive sur $C_c(\mathbb{R}^d)$ définit nécessairement une application d'intégration.

14. Montrer que, si $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, alors il existe un point $P \in \mathbb{R}^d$ tel que la fonction f atteinde son maximum en P.

Solution. Soit M un fermé borné dans $\mathbb{R}^d$ qui contient le support de f. La restriction de f à M est continue, donc atteint son maximum en un point $Q \in M$. La fonction f étant nulle en dehors de M, on obtient que, ou bien $f(Q) \geqslant 0$ et f atteint son maximum en Q, ou bien $f(Q) < 0$ et f atteint son maximum en n'import quel point P en dehors de M.

15. Montrer que, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fonctions dans $C_c(\mathbb{R}^d)$ qui converge vers 0, alors la suite $(\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|f_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Solution. Le problème est trivial lorsque l'une des fonctions f_n est nulle. Dans la suite, on suppose que chaque f_n est non-nul. Soit M un fermé borné de $\mathbb{R}^d$ qui contient le support de f_0 (et donc contient le support de n'import quelle f_n). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit P_n un point de M où f_n atteint son maximum. La suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, il existe un sous-suite de $(P_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un point P.

Quitte à remplacer $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, on peut supposer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers P. Comme $f_n(P)$ converge vers 0 lorsque n tend vers l'infini, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $f_N(P) < \varepsilon$. Comme f_N est continue, il existe $\delta > 0$ tel que $f_N(x) < 2\varepsilon$ pour $x \in B(P;\delta)$. Enfin, comme $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers P, il existe $N_1 \geqslant N$ tel que $P_n \in B(P;\delta)$ dès que $n \geqslant N_1$. Pour tout $n \geqslant N_1$, on a alors

$$f_n(P_n) \leqslant f_N(P_n) < 2\varepsilon.$$

Le résultat est ainsi démontré.

16. Soit $I : C_c(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ une application linéaire telle que $I(f) \geqslant 0$ pour toute fonction positive $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$. Montrer que, pour toute suite décroissante $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions dans $C_c(\mathbb{R}^d)$ qui converge vers 0, on a

$$\lim_{n\to+\infty} I(f_n) = 0.$$

Solution. Soit g une fonction positive dans $C_c(\mathbb{R}^1)$ qui vaut 1 sur le support de f_0. On a alors $f_n \leqslant \|f_n\| \cdot g$, où $\|f_n\|$ désigne $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f_n(x)|$. On obtient alors $I(f_n) \leqslant \|f_n\| I(g)$, d'où (d'après la question précédente)

$$\lim_{n\to+\infty} I(f_n) = 0.$$