THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES (GROUPE DE LECTURE À L'ENS LYON 2014)

Huayi Chen

La théorie des nombres est un domaine de mathématique très classique à la fois très actif, qui a des liens étroits avec diverses branches de mathématiques. Ce groupe de lecture porte sur l'aspect analytique de cette théorie. Récemment des progress importants ont été obtenus dans ce domaine, notamment sur le problème de nombres premiers jumaux. En effet, en rafinant des méthodes développées par Goldston, Pintz et Yıldırım, Yitang Zhang a pu montrer le résultat suivant

Théorème 0.1. — *Soit* $(p_n)_{n\geqslant 0}$ *la suite strictement croissante de tous les nombres premiers. On a*

$$\liminf_{n\to+\infty}(p_{n+1}-p_n)\leqslant 7\times 10^7.$$

Très récemment, Maynard a pu réduit la constante 7×10^7 à 600, en proposant un autre raffinement des méthodes de Goldston, Pintz et Yıldırım, qui est essentiellement basé sur le théorème de Bombieri-Vinogradov.

Rappelons que la conjecture de nombres premiers jumaux prédit que

$$\liminf_{n\to+\infty}(p_{n+1}-p_n)=2.$$

Bien que, du point de vue numérique, les résultats mentionnés plus haut restent encore loin de la conjecture elle-même, l'avancement est en fait décisif : avant le résultat de Zhang, on ne savait pas si la limite inférieure des écarts entre les nombres premiers est finie.

Le but du groupe de lecture est d'assimiler les outils importants de la théorie analytique des nombres qui permettent les étudiants d'approfondir dans la direction de ces avancements récents de recherche. Certains exposés utiliseront des résultats démontrés dans le cours d'analyse complexe, où des jolis exemples et applications de cette théorie classique seront présentés. Certains d'autres exposés traitent l'aspet plus combinatoire de la théorie des nombres comme par exemple la méthode de crible. On espère motiver les participants de ce groupe de lecture à approfondir dans cette théorie très riche et éventuellement poursuivre la recherche dans cette direction.

1. Aspect algébrique des séries de Dirichlet

Le but de cette séance est de présenter le lien entre les fonctions arithmétiques et les séries de Dirichlet. Du point de vue algébrique, une série de Dirichlet est une somme formelle de la forme

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{f(n)}{n^s}.$$

Ensenblistement, les séries de Dirichlet sont en correspondance biunivoque avec les suites de nombres complexes indexée par $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Une telle suite est appelée une *fonction arithmétique*. On peut munir l'ensemble des séries de Dirichlet formelles (et donc l'ensemble des fonctions arithmétiques) des lois de composition pour former un anneau commutatif unifère. L'aurateur présentera les proprétés algébriques de cet anneau, ainsi que des exemples de fonctions arithmétiques que l'on utilisera plus loin dans le groupe de lecture, comme par exemple la fonction de Möbius μ, la fonction de Mangoldt Λ etc.

Référence. — T. Apostol, *Introduction to analytic number theory* (chapitre 2), Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag 1976, xii+338 pp.
G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres* (chapitre I.2), Cours Spécialisés **1**, Société Mathématique de France, 1995, xv+457 pp.

2. Sommation d'Abel, formule d'Euler-Maclaurin

La sommation d'Abel est un outil important de la théorie analytique des nombres. Du point de vue de la théorie d'intégration, la sommation d'Abel peut être considérée comme une version discrète de la fomule d'intégration par partie. La formule sommatoire d'Euler-Maclaurin est une forme itérée de la sommation d'Abel. Dans cet exposé, l'orateur présentera la démonstration de ces formules, ainsi que des applications dans les estimations de Tchébychev sur le comptage des nombres premiers.

Référence. — G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres* (chapitre I.0-I.1), Cours Spécialisés **1**, Société Mathématique de France, 1995, xv+457 pp.

3. Sommes partielles de fonction arithmétique, ordre moyen

Cette séance porte sur diverses applications des formules de sommation présentées dans l'exposé 2. On étudie l'ordre moyenne de plusieurs fonctions arithmétiques, comme par exemple le nombre de diviseurs, la fonction d'Euler, le nombre de facteurs premiers, la fonction de Möbius etc. On introduit aussi les fonctions sommatoires de Tchébychev, qui seront utiles plus loin dans le théorème des nombres premiers.

Référence. — T. Apostol, *Introduction to analytic number theory* (chapitre 3), Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag 1976, xii+338 pp.
G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres* (chapitre I.3), Cours Spécialisés **1**, Société Mathématique de France, 1995, xv+457 pp.

4. L'aspect analytique des séries de Dirichlet

Soient $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ une fonction arithmétique et F la série de Dirichlet

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{f(n)}{n^s}$$

correspondante. Sous des hypothèses de convergence convenables, la série de Dirichlet F définit une fonction holomorphe sur un demi-plan dans $\mathbb{C}$. Cette fonction holomorphe possède souvent un prolongement méromorphe sur un ouvert de $\mathbb{C}$, qui contient des informations importantes sur le comportement arithmétique de la fonction f. Cette idée est fondamentale dans la théorie analytique des nombres. Similairement aux séries entières, les séries de Dirichlet admettent des abscisses de convergence. Cependant, les abscisses de convergence d'une série de Dirichlet peuvent différer, suivant si on considère la convergence simple ou la convergence absolue. L'orateur expliquera cette subtilité et présentera quelques applications dans l'étude de la fonction sommatoire comme par exemple la fomule de Perron.

Référence. — G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres* (chapitre II.1-II.2), Cours Spécialisés **1**, Société Mathématique de France, 1995, xv+457 pp.

5. Propriétés analytiques de la fonction zêta de Riemann

Cet exposé est consacré à une première étude de la fonction ζ de Riemann, qui est définie par la série de Dirichlet

$$\zeta(s) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^s}.$$

On démontre que la série converge absoluement sur le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 1$, admet un prolongement méromorphe sur tout le plan complexe, et vérifie une équation fonctionnelle qui relie $\zeta(s)$ et $\zeta(1-s)$. Dans la littérature, il existe plusieurs démonstrations de ces résultats. L'orateur peut choisir librement l'une des approches.

Référence. — G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres* (chapitre II.3), Cours Spécialisés **1**, Société Mathématique de France, 1995, xv+457 pp.
La fonction zêta (chapitres 1 et 2). Éditions de l'École Polytechnique, Palaiseau, 2003. vi+193

6. Théorème des nombres premiers

Le but de cet exposé est de présenter la démonstration du théorème des nombres premiers comme la suite

Théorème 6.1. — *Pour tout $x > 0$, soit $\pi(x)$ le nombre des nombres premiers $\leqslant x$. Alors on a*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}, \quad x \to +\infty.$$

Cela résulte du fait que la fonction ζ de Riemann (comme ne fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$) n'admet pas de point de zéro sur le demi-plan $\mathrm{Re}(s) \geqslant 1$. La démonstration présentée par Zagier est particulièrement simple, mais l'orateur peut aussi choisir de raconter plus de lien entre le comptage des nombres premiers et la répartition des points de zéro de la fonction ζ de Riemann (notamment l'hypothèse de Riemann).

Référence. — G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres* (chapitre II.4), Cours Spécialisés **1**, Société Mathématique de France, 1995, xv+457 pp.
D. Zagier, *Newman's short proof of the prime number theorem*, Amer. Math. Monthly **104** (1997), no.8, 705-708.
La fonction zêta (chapitres 1 et 2). Éditions de l'École Polytechnique, Palaiseau, 2003. vi+193

7. Caractères d'un groupe abélien fini

Cet exposé porte sur une présentation sur les caractères d'un groupe abélien fini, qui servira plus loin dans la démonstration du théorème de Dirichlet sur la répartition des nombres premiers dans les progressions arithmétiques. On considère notamment les caractères du groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ des éléments inversibles dans l'anneau quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. L'orateur peut aborder des exemples intéressants comme par exemple le symbole de Legendre et la loi de réciprocité quadratique.

Référence. — M. Hindry, Arithmetics (chapitre 1). Universitext. Springer, London, 2011. xviii+321 pp.

8-9. Théorème de Dirichlet

Le but de ces exposés est de présenter la démonstration du théorème de Dirichlet.

Théorème 9.1. — *Soient n et a deux entiers tels que* $\mathrm{pgcd}(n,a)=1$. *Pour $x>0$, on désigne par $\pi(x;n,a)$ le nombre des nombres premiers $p\leqslant x$ tels que $p\equiv a \pmod n$. Alors on a*

$$\pi(x;n,a)\sim\frac{1}{\varphi(n)}\cdot\frac{x}{\ln(x)},$$

où $\varphi(.)$ est la fonction d'Euleur.

On introduira les caractères de Dirichlet (comme des fonctions arithmétiques) modulo un entier n et fera le lien avec les caractètre du groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. La démonstration repose sur l'étude de la série de Dirichlet associée à cette fonction arithmétique.

Référence. — T. Apostol, *Introduction to analytic number theory* (chapitre 7), Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag 1976, xii+338 pp.
G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres* (chapitre II.8), Cours Spécialisés **1**, Société Mathématique de France, 1995, xv+457 pp.

10-12. Méthode de crible et applications au problème de nombres premiers jumaux

La méthode de crible est une approche combinatoire de la théorie analytique des nombres. Elle est basée sur le principe d'inclusion-exclusion, ou la formule d'inversion de Möbius.

Le but des trois derniers exposé est de présenter cette théorie ainsi que ses applications au problème de nombres premiers jumaux, comme par exemple le résultat de Maynard sur la minoration de décart entre deux nombres premiers consécutifs. Plusieurs techniques seront présentées dans ces exposés, comme le théorème de Bombieri-Vinogradov, le crible de Goldston, Pintz et Yıldırım etc.

Référence. — G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres* (chapitre I.4), Cours Spécialisés **1**, Société Mathématique de France, 1995, xv+457 pp.
R. C. Vaughan, *The Bombieri-Vinogradov theorem*,
http ://www.personal.psu.edu/rcv4/Bombieri.pdf
J. Maynard, *Small gaps between primes*,
http ://arxiv.org/abs/1311.4600

---

8 janvier 2014

HUAYI CHEN, • *E-mail :* huayi.chen@ujf-grenoble.fr
Url : http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~huayi