Huayi CHEN

COURS M1 PROBABILITÉS

Huayi CHEN
Université Grenoble Alpes, Institut Fourier (UMR5582), 38402 Saint Martin d'Hères, France.
E-mail : huayi.chen@ujf-grenoble.fr

CHAPITRE 2

INDÉPENDANCE

2.1. Produit de mesures σ-finies

Soient $(E, \mathcal{E})$ et $(F, \mathcal{F})$ deux espaces mesurables. On suppose donner des mesures σ-finies μ et ν sur ces deux espaces mesurables respectivement. Le but de ce paragraphe est de construire une mesure σ-finie sur l'espace mesurable produit $(E \times F, \mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$, qui vérifie certaines bonnes propriétés. On commence par un critère de mesurabilité successive comme dans la proposition suivante.

Proposition 2.1.1. — *Soit f une fonction sur $E \times F$ qui est $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$-mesurable. Pour tout $x \in E$, la fonction de F vers $\mathbb{R}$ qui envoie $y \in F$ en $f(x, y)$ est $\mathcal{F}$-mesurable.*

Démonstration. — Sans perte de généralité, on peut supposer f positive et bornée. Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions positives et bornées h sur $E \times F$ telles que $y \mapsto h(x, y)$ soit $\mathcal{F}$-mesurable. C'est une λ-famille de fonctions positives et bornées sur $E \times F$. En outre, $\mathcal{H}$ contient l'ensemble $\mathcal{C}$ des combinaisions linéaires à coefficients positifs de fonctions de la forme $(x, y) \mapsto h_1(x)h_2(y)$, où h_1 et h_2 sont des fonctions positives, bornées et mesurables sur $(E, \mathcal{E})$ et $(F, \mathcal{F})$ respectivement. La famille $\mathcal{C}$ est certainement stable par la multiplication. Donc $\mathcal{H}$ contient toute fonction positive, bornée et $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$-mesurable. $\square$

Théorème 2.1.2. — *Si f est une fonction positive et $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$-mesurable. Alors la fonction*

$$x \longmapsto \int_F f(x, y)\, \nu(\mathrm{d}y)$$

est $\mathcal{E}$-mesurable. En outre, il existe une unique mesure σ-finie $\mu \otimes \nu$ sur $(E \times F, \mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$ telle que

$$\int_{E\times F} h(x,y)(\mu\otimes\nu)(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y) = \int_E \int_F h(x,y)\,\nu(\mathrm{d}y)\mu(\mathrm{d}x) \tag{2.1}$$

pour toute fonction positive et $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$-mesurable h.

Démonstration. — Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions h positives, bornées et $(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$-mesurables telle que

$$x \longmapsto \int_F f(x,y)\,\nu(\mathrm{d}y)$$

soit $\mathcal{F}$-mesurable. La famille $\mathcal{H}$ est une λ-famille. En outre, $\mathcal{H}$ contient l'ensemble $\mathcal{C}$ des combinaison linéaires à coefficients positifs de fonctions de la forme $(x,y) \mapsto h_1(x)h_2(y)$, où h_1 et h_2 sont des fonctions positives, bornées et mesurables sur $(E,\mathcal{E})$ et $(F,\mathcal{F})$ respectivement. La famille $\mathcal{C}$ est stable par multiplication, donc $\mathcal{H}$ contient toutes les fonctions positives, bornées et $(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$-mesurables, compte tenu du théorème 1.1.16.

On désigne par $\mathcal{G}_0$ la famille des sous-ensembles de $E \times F$ qui s'écrivent sous la forme $A \times B$, où $A \in \mathcal{E}$ et $B \in \mathcal{F}$. C'est un semi-anneau de sous-ensembles de $E \times F$ et l'application

$$A \times B \longmapsto \int_E \int_F \mathbb{1}_{A\times B}(x,y)\nu(\mathrm{d}y)\,\mu(\mathrm{d}x)$$

définit une fonction σ-additive sur $\mathcal{G}_0$. D'après le théorème 1.2.27, cette application s'étend de façon unique en une mesure σ-finie sur $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ que l'on note comme $\mu \otimes \nu$. L'égalité (2.1) est vérifiée pour toute combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions de la forme $\mathbb{1}_{A\times B}$, où $A \in \mathcal{E}$ et $B \in \mathcal{F}$. D'après le théorème de classe monotone 1.1.16, on obtient que l'égalité (2.1) est véfrifiée pour toute fonction positive, bornée et $(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$-mesurable. Enfin, d'après la proposition 1.2.17, on obtient que l'égalité (2.1) est véfrifiée pour toute application $(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$-mesurable de $E \times F$ vers $[0,+\infty]$. □

***Corollaire 2.1.3* (Fubini).** — *Soit f une fonction sur $E \times F$ qui est $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$-mesurable. Alors f est intégrable par rapport à $\mu \otimes \nu$ si et seulement si*

$$\int_E \int_F |f(x,y)|\nu(\mathrm{d}y)\mu(\mathrm{d}x) < +\infty.$$

En outre, si $f \in \mathscr{L}^1(E \times F, \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}, \mu \otimes \nu)$*, alors on a*

$$\begin{aligned}
&\int_{E\times F} f(x,y)\,(\mu\otimes\nu)(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)\\
&= \int_E \int_F f(x,y)\nu(\mathrm{d}y)\mu(\mathrm{d}x)\\
&= \int_F \int_E f(x,y)\mu(\mathrm{d}x)\nu(\mathrm{d}y).
\end{aligned}$$

Remarque 2.1.4. — On peut étendre naturellement les résultats présentés dans ce paragraphe au cas du produit d'un nombre fini d'espaces mesurables munis des mesures σ-finies.

2.2. Indépendance des événements

Dans ce paragraphe, on fixe un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements dans $\mathcal{F}$. Si, pour tout sous-ensemble fini J de I on a

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j),$$

on dit que les événements $(A_i)_{i\in I}$ sont *mutuellement indépendants* (sous la probabilité $\mathbb{P}$), ou que la famille $(A_i)_{i\in I}$ est *mutuellement indépendante*.

Soit $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles de $\mathcal{F}$. Si toute famille $(A_i)_{i\in I}$ d'événements, telle que $A_i \in \mathcal{A}_i$ quel que soit $i \in I$, est mutuellement indépendante, on dit que la famille $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ est mutuellement indépendante.

Dans ce cours, sauf mention au contraire, le mot «*indépendant*» signifie «*mutuellement indépendant*».

Proposition 2.2.1. — *Soit* $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ *une famille indépendante de* π*-systèmes contenus dans* $\mathcal{F}$*. Alors la famille* $(\sigma(\mathcal{A}_i))_{i\in I}$ *est aussi indépendante.*

Démonstration. — Sans perte de généralité, on peut supposer que I est un ensemble fini, disons est $\{1,\dots,n\}$, et que $\Omega \in \mathcal{A}_i$ pour tout i. Sous ces hypothèse, l'indépendance de la famille $(\mathcal{A}_i)_{i=1}^n$ est équivalente à la condition suivante

$$\forall\,(A_1,\dots,A_n) \in \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n, \quad \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i).$$

Dans la suite, on suppose $n \geqslant 2$ car le cas où $n = 1$ est trivial.

Montrons d'abord que la famille $(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_{n-1}, \sigma(\mathcal{A}_n))$ est indépendante. On désigne par $\mathcal{G}$ l'ensemble des $B \in \mathcal{F}$ tel que, pour tout $(A_1, \dots, A_{n-1}) \in \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_{n-1}$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap B) = \mathbb{P}(A_1) \cdots \mathbb{P}(A_{n-1})\mathbb{P}(B).$$

C'est un λ-système qui contient le π-système $\mathcal{A}_n$. Le corollaire 1.1.3 montre alors que $\mathcal{G} \supset \sigma(\mathcal{A}_n)$. On obtient donc l'indépendance de la famille $(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_{n-1}, \sigma(\mathcal{A}_n))$. Si on applique ce résultat pour n fois, on obtient l'indépendance de la famille $(\sigma(\mathcal{A}_1), \dots, \sigma(\mathcal{A}_n))$. □

Soient $(X_i)_{i \in I}$ une famille de variables aléatoires $\mathcal{F}$-mesurables à valeurs dans des espaces mesurables $((E_i, \mathcal{E}_i))_{i \in I}$, on dit que la famille $(X_i)_{i \in I}$ est *indépendante* (ou que les variables aléatoires X_i, $i \in I$, sont *indépendante*) si la famille de tribus $(\sigma(X_i))_{i \in I}$ est indépendante.

Corollaire 2.2.2. — *Soit $(X_i)_{i=1}^n$ une famille finie de variables aléatoires réelles. La famille $(X_i)_{i=1}^n$ est indépendante si et seulement si, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a*

$$\mathbb{P}(X_1 \leqslant x_1, \dots, X_n \leqslant x_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \leqslant x_i).$$

Démonstration. — La tribu $\sigma(X_i)$ est engendré par le π-système

$$\Big\{ \{X_i \leqslant x_i\} \,\Big|\, x_i \in \mathbb{R} \Big\}.$$

L'énoncé résulte donc de la proposition 2.2.1. □

Proposition 2.2.3. — *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(X_i)_{i=1}^n$ une famille indépendante de variables aléatoires intégrables. Alors le produit $\prod_{i=1}^n X_i$ est également une variable aléatoire intégrable, et on a*

$$\mathbb{E}[X_1 \cdots X_n] = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k]. \tag{2.2}$$

Si de plus les variables aléatoires X_i sont carré intégrables, alors on a

$$\operatorname{var}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{k=1}^n \operatorname{var}(X_k). \tag{2.3}$$

Démonstration. — Soit X la variable aléatoire $(X_1, \dots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$. L'indépendance de la famille $(X_1, \dots, X_n)$ montre que la loi de probabilité de X

s'identifie au produit des lois de probabilité de $X_1, \dots, X_n$. L'égalité (2.4) provient donc du théorème de Fubini. Enfin, pour montrer l'égalité (2.3), il suffit de traiter le cas où $n = 2$. On a

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(X_1 + X_2) &= \mathbb{E}[(X_1 + X_2)^2] - (\mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2])^2 \\ &= \mathbb{E}[X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2] - \mathbb{E}[X_1]^2 + 2\mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2] + \mathbb{E}[X_2]^2 \\ &= \mathbb{E}[X_1^2] + \mathbb{E}[X_2^2] - \mathbb{E}[X_1]^2 - \mathbb{E}[X_2]^2 = \operatorname{var}(X_1) + \operatorname{var}(X_2),\end{aligned}$$

où la deuxième égalité provient de (2.4). □

Exemple 2.2.4. — Soit $X_1, \dots, X_n$ une famille indépendante de variable aléatoires qui suivent la loi de Bernoulli $B(p)$ avec le même paramètre $p \in [0, 1]$. Alors la somme $X = X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi binomiale $B(n, p)$. On obtient donc $\mathbb{E}[X] = np$ et $\operatorname{var}[X] = np(1 - p)$.

2.3. Mesure de probabilité produit infini

Soit $((E_i, \mathcal{E}_i))_{i \in I}$ une famille infinie d'espaces mesurables. Pour tout $i \in I$, soit $\mathbb{P}_i$ une mesure de probabilité sur $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Soit $(E, \mathcal{E})$ le produit des espaces mesurables $((E_i, \mathcal{E}_i))_{i \in I}$. Pour tout $A \in \mathcal{E}$, il existe un sous-ensemble dénombrable J de I et un élément $A' \in \bigotimes_{j \in J} \mathcal{E}_j$ tel que

$$A = A' \times \Big(\prod_{i \in I \setminus J} E_i \Big).$$

En effet, les sous-ensembles de E qui vérifient cette condition forment une tribu de E, qui continent une sous-famille engendrant la tribu $\mathcal{E}$. Donc cette tribu s'identifie à $\mathcal{E}$.

Théorème 2.3.1. — *Il existe une unique mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(E, \mathcal{E})$ telle que, pour toute famille $(A_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{E}_i$ avec $A_i = E_i$ pour tout sauf un nombre fini d'indices $i \in I$, on a*

$$\mathbb{P}\Big(\prod_{i \in I} A_i \Big) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}_i(A_i) \tag{2.4}$$

Démonstration. — On désigne par $\mathcal{F}_0$ la famille des sous-ensembles de E de la forme $(A_i)_{i \in I}$, où $A_i \in \mathcal{E}_i$ quel que soit $i \in I$, et $A_i = E_i$ pour tout sauf un nombre fini d'indices $i \in I$. On définit une application $\mathbb{P} : \mathcal{F}_0 \to [0, 1]$ comme le membre de droite de la formule (2.4). La famille $\mathcal{F}_0$ est un semi-anneau et $\mathbb{P}$ est une application additive. En outre, $\sigma(\mathcal{F}_0)$ s'identifie à la tribu produit des $\mathcal{E}_i$ $(i \in I)$. D'après le théorème 1.2.27, il suffit de montrer que l'application $\mathbb{P}$

est σ-additive. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'ensembles dans $\mathcal{F}_0$ qui sont deux-à-deux disjoints, telle que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Montrons que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = 1$ par absurde. On suppose dans la suite que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < 1$.

Traitons d'abord le cas où I est un ensemble dénombrable, disons $I = \mathbb{N}$. Chaque ensemble A_n s'écrit donc de la forme

$$A_n = A_{n,0} \times A_{n,2} \times \cdots$$

où chaque $A_{n,i} \in \mathcal{E}_i$ et il existe $i_n \in \mathbb{N}$ tel que $A_{n,i} = E_i$ dès que $i > i_n$. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on définit une fonction H_k sur $E_0 \times \cdots \times E_k$ comme

$$H_k(x_0, \ldots, x_k) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Big(\prod_{j>k} \mathbb{P}_j(A_{n,j}) \Big) \cdot \Big(\prod_{i=0}^{k} \mathbb{1}_{A_{n,i}}(x_i) \Big).$$

C'est une fonction qui prend valeurs dans $[0, 1]$. Montrons qu'il existe un élément $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i\geqslant 0} \in E$ tel que $H_k(x_0, \ldots, x_k) < 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'abord la condition $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < 1$ montre que

$$\int_{E_0} H_0(x)\, \mathbb{P}_0(\mathrm{d}x) < 1,$$

il existe alors un $x_0 \in E_0$ tel que $H_0(x_0) < 1$. Le cas général résulte de la relation

$$H_k(x_0, \ldots, x_k) = \int_{E_{k+1}} H_{k+1}(x_0, \ldots, x_k, x)\, \mathbb{P}_{k+1}(\mathrm{d}x)$$

par récurrence sur k. Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $\boldsymbol{x} \in A_m$. On a évidemment

$$\Big(\prod_{j>i_m} \mathbb{P}_j(A_{m,j}) \Big) \cdot \Big(\prod_{i=0}^{i_m} \mathbb{1}_{A_{m,i}}(x_i) \Big) = 1.$$

Cela contradit la relation $H_{i_m}(x_0, \ldots, x_{i_m}) < 1$.

Dans le cas où I n'est pas dénombrable, on peut choisir un sous-ensemble dénombrable J de I tel que

$$A_n \in \Big\{ \Big(\prod_{i\in I\setminus J} E_i \Big) \times A' \,\Big|\, A' \in \bigotimes_{j\in J} \mathcal{E}_j \Big\}.$$

Le résultat que l'on a démontré appliqué à $(\prod_{j\in J} E_j, \bigotimes_{j\in J} \mathcal{E}_j)$ conduit à l'inégalité souhaitée. □

Corollaire 2.3.2. — *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(X_i)_{i\in I}$ une famille de variables aléatoires dans des espaces mesurables $((E_i, \mathcal{E}_i))_{i\in I}$. Alors la famille $(X_i)_{i\in I}$ est indépendante par rapport à la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ si et seulement si la loi de la variable aléatoire $X = (X_i)_{i\in I} : \Omega \to \prod_{i\in I} E_i$ s'identifie au produit des lois de probabilité des X_i ($i \in I$).*

2.4. Lemme de Borel-Cantelli, loi du zéro-un

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{F}$, on désigne par $\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n$ l'ensemble

$$\bigcap_{n\geqslant 1} \bigcup_{k\geqslant n} A_k.$$

Rappeolons que la fonction indicatrice de cet ensemble n'est rien d'autre que la limite supérieure de la suite $(\mathbb{1}_{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$.

***Proposition 2.4.1* (Lemme de Borel-Cantelli)**. — *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille indépendante d'événements dans $\mathcal{F}$. Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$, alors $\mathbb{P}(\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n) = 1$.*

Démonstration. — Comme la famille $(A_k)_{k\geqslant n}$ est indépendante, il en est de même de $(A_k^c)_{k\geqslant n}$. Donc on a

$$\mathbb{P}(\textstyle\bigcap_{k\geqslant n} A_k^c) = \displaystyle\prod_{k\geqslant n} \mathbb{P}(A_k^c) = \prod_{k\geqslant n} (1 - \mathbb{P}(A_k)) \leqslant \exp\Big(-\sum_{k\geqslant n} \mathbb{P}(A_k)\Big) = 0,$$

d'où $\mathbb{P}(\bigcup_{k\geqslant n} A_k) = 1$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$. □

***Théorème 2.4.2* (Loi du zéro-un)**. — *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille indépendante de sous-tribus de $\mathcal{F}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{G}_n = \sigma(\bigcup_{k\geqslant n} \mathcal{F}_k)$. Soit $\mathcal{G}_\infty$ l'intersection des $\mathcal{G}_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Alors les tribus $\mathcal{G}_\infty$ et $\mathcal{G}_0$ sont indépendantes. De plus, pour tout $A \in \mathcal{G}_\infty$ on a $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$.*

Démonstration. — Pour tout entier $n \geqslant 1$, la tribu $\mathcal{G}_n$ est indépendante à la tribu $\mathcal{F}_i$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. On en déduit que $\mathcal{G}_\infty$ est indépendante à $\mathcal{F}_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Donc elle est indépendante à la tribu $\mathcal{G}_0 = \sigma(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n)$. En particulier, la tribu $\mathcal{G}_\infty$ est indépendante à elle-même. Pour tout $A \in \mathcal{G}_\infty$ on a donc

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A)^2,$$

c'est-à-dire que $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$. □