Université Joseph Fourier
M1 Probabilités
2014-2015

Contrôle de connaissance
du 07 janvier 2015

Les documents sont autorisés. Cependant, tout appareil électronique est interdit. Lire attentivement l'ensemble des énoncés avant de répondre aux questions. Les trois parties de l'épreuve sont indépendantes.

Première partie

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $[0,+\infty[$ qui envoie (x,y) en $\mathrm{e}^{-y}\mathbb{1}_{\{0\leqslant x\leqslant y\}}$. On désigne par η la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que la mesure borélienne ν sur $\mathbb{R}^2$ définie par la relation $\mathrm{d}\nu = f\,\mathrm{d}\eta$ est une mesure de probabilité.

2. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ qui suit la loi ν. Calculer ses lois marginales, c'est-à-dire les lois des variables aléatoires X et Y respectivement.

3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

4. Soit $Z = X/Y$. Déterminer la fonction $((a,b)\in[0,+\infty[^2)\mapsto \mathbb{P}(Y\leqslant a, Z\leqslant b)$.

5. Les variables aléatoires Y et Z sont-elle indépendantes ?

6. Soit (U,V) un couple de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi uniforme sur $[0,1]$. D'éterminer un application $\phi : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $\phi(U,V)$ suive la loi ν.

Deuxième partie

Le but de cette partie est d'étudier la convergence de somme de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ vers la loi de Poisson. On fixe un nombre réel $\lambda > 0$ et on désigne par $\mathcal{P}_\lambda$ la loi de Poisson de paramètre λ. Rappelons qu'une variable aléatoire Z suit la loi $\mathcal{P}_\lambda$ si et seulement si

$$\forall\, k\in\mathbb{N},\quad \mathbb{P}(Z=k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Pour tout nombre réel p, on désigne par $\mathcal{H}_p$ l'ensemble des fonctions $h : \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ telles que

$$|h(k)| = O(k^p),\quad k\to+\infty.$$

Rappelons que $|h(k)| = O(k^p)$ signifie qu'il existe une constante $C>0$ (qui peut dépendre de h) telle que $|h(k)|\leqslant Ck^p$ pour tout $k\in\mathbb{N}$, $k\geqslant 1$. Si $h\in\mathcal{H}_p$, on définit

$$\|h\|_p := \sup_{k\in\mathbb{N},\,k\geqslant 1}\frac{|h(k+1)-h(k)|}{k^p}.$$

Soit en outre

$$\mathcal{H}_\infty = \bigcup_{p\in\mathbb{R}}\mathcal{H}_p.$$

7. Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}_\lambda$. Montrer que, pour toute fonction $h \in \mathcal{H}_\infty$, les espérances $\mathbb{E}[Zh(Z)]$ et $\mathbb{E}[h(Z+1)]$ sont bien définies, et on a

$$\mathbb{E}[Zh(Z)] = \lambda \mathbb{E}[h(Z+1)].$$

8. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\lambda = \mathbb{E}[X]$. Montrer qu'il existe une unique mesure de probabilité ν_X^* sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ telle que, pour toute variable aléatoire X^* à valeur dans $\mathbb{N}$, qui suit la loi ν_X^*, on ait

$$\mathbb{E}[Xf(X)] = \lambda \mathbb{E}[f(X^*+1)]$$

pour toute fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que $\mathbb{E}[|Xf(X)|] < +\infty$, où $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ désigne la tribu de tous les sous-ensembles de $\mathbb{N}$.

9. Soit p un nombre réel. Pour tout $h \in \mathcal{H}_p$, soit $f_h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ la fonction qui envoie $k \in \mathbb{N}$ en 0 si $k = 0$ et en

$$f_h(k) := \frac{(k-1)!}{\lambda^k} \sum_{j \in \mathbb{N},\, j \geqslant k} \frac{\lambda^j}{j!} h(j) \quad \text{si } k > 0.$$

Montrer que f_h est bien définie et vérifie l'équation fonctionnelle

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ k \geqslant 1, \quad k f_h(k) - \lambda f_h(k+1) = h(k).$$

10. Soit p un nombre réel. Pour toute fonction $h \in \mathcal{H}_p$, soit $\tau(h) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ la fonction telle que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad (\tau(h))(k) := \frac{h(k+1)}{k+1}.$$

Montrer que $\tau(h) \in \mathcal{H}_{p-1}$ et que

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ k \geqslant 1, \quad f_{\tau(h)}(k) = \frac{f_h(k+1)}{k}.$$

11. Soient $p \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathcal{H}_p$. Montrer que $f_h \in \mathcal{H}_{p-1}$. On peut raisonner par récurrence sur p en utilisant l'application τ, où on considère le cas où $p \leqslant 0$ comme le cas initial dans le procédé de récurrence.

Dans les questions suivantes, on fixe un entier $n \geqslant 1$. Soit X une variable aléatoire carré intégrable à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui est d'espérance λ/n. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, soient X_i une variable aléatoire qui suit la même loi que X et X_i^* une variable aléatoire qui suit la loi ν_X^* définie dans la question **8**. Soit I une variable aléatoire à valeur dans $\{1, \ldots, n\}$ telle que

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}, \quad \mathbb{P}(I = i) = \frac{1}{n}.$$

On suppose que la famille de variables aléatoires $(X_1, \ldots, X_n, X_1^*, \ldots, X_n^*, I)$ est mutuellement indépendante, et on note

$$W = X_1 + \cdots + X_n, \quad W^* = W - X_I + X_I^*.$$

12. Montrer que, pour toute fonction $f \in \mathcal{H}_0$, on a

$$\mathbb{E}[Wf(W)] = \frac{\lambda}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[f(W - X_i + X_i^* + 1)] = \lambda\mathbb{E}[f(W^* + 1)].$$

13. En déduire que, pour toute fonction $h \in \mathcal{H}_1$, on a

$$\mathbb{E}[h(W)] - \mathcal{P}_\lambda(h) = \lambda\mathbb{E}[f_{\overline{h}}(W^* + 1)] - \lambda\mathbb{E}[f_{\overline{h}}(W + 1)],$$

où $\mathcal{P}_\lambda(h)$ désigne l'espérance de la fonction h par rapport à la loi de Poisson $\mathcal{P}_\lambda$, et $\overline{h}$ désigne la fonction $h - \mathcal{P}_\lambda(h)$.

14. Montrer que, pour toute fonction $h \in \mathcal{H}_1$, on a

$$\big|\mathbb{E}[h(W)] - \mathcal{P}_\lambda(h)\big| \leqslant \|f_{\overline{h}}\|_0 \cdot \mathbb{E}[X|\widetilde{X} - X - 1|],$$

où $\widetilde{X}$ est une variable aléatoire indépendante à X et qui admet la même loi que X.

15. On suppose que $\lambda < n$ et que X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = \lambda/n$. Déterminer la valeur de $\mathbb{E}[X|\widetilde{X} - X - 1|]$. En déduire une majoration uniforme de

$$|\mathbb{P}(W \leqslant t) - \mathbb{P}(Z \leqslant t)|, \quad t \in \mathbb{R},$$

où Z est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ.

16. Montre que la variable aléatoire W converge faiblement vers la loi de Poisson $\mathcal{P}_\lambda$ lorsque n tend vers l'infini.

Troisième partie

Le but de cette partie est de comprendre quelques propriétés de lois de probabilité log-concaves. On fixe un entier $n \geqslant 1$. Un sous-ensemble Δ de $\mathbb{R}^n$ est dit *convexe* si, pour tous x et y dans Δ et tout $\lambda \in]0,1[$, on a $\lambda x + (1-\lambda)y \in \Delta$.

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty[$ est *log-concave* si, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ et tout $\lambda \in]0,1[$, on a

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant f(x)^\lambda f(y)^{1-\lambda}.$$

On désigne par $\phi(.)$ la densité de la loi normale centrée et réduite par rapport à la mesure de Lebesgue. On rappelle que

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t^2/2}.$$

17. Soit Δ un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$. Montrer que la fonction indicatrice $\mathbb{1}_\Delta$ est log-concave.

18. Soient a et b deux nombres positifs et $\lambda \in]0,1[$, montrer que

$$\lambda a + (1-\lambda)b \geqslant a^{\lambda} b^{1-\lambda}.$$

19. Montrer que la densité $\phi(.)$ de la loi normale centrée et réduite est une fonction log-concave sur $\mathbb{R}$.

20. Soient A, B et C trois sous-ensembles boréliens de $\mathbb{R}$ tels que $A + B \subset C$, où

$$A + B := \{a + b \,|\, a \in A,\ b \in B\}.$$

Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_C(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B(x)\,\mathrm{d}x,$$

où $\mathrm{d}x$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
Indication : Pour tout $(a,b) \in A \times B$, l'ensemble C contient $(\{a\} + B) \cup (A + \{b\})$.

21. Soient $\lambda \in]0,1[$ et f, g et h trois fonctions boréliennes positives sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant f(x)^{\lambda} g(y)^{1-\lambda}.$$

Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \lambda \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x + (1-\lambda) \int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Indication : On peut exprimer l'intégrale de h sous la forme

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{h(x) \geqslant t\}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

22. En déduire l'inégalité de Prékopa-Leindler : si $\lambda \in]0,1[$ et si f, g et h sont trois fonctions boréliennes positives sur $\mathbb{R}^n$ telles que

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n, \quad h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant f(x)^{\lambda} g(y)^{1-\lambda},$$

alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x \right)^{\lambda} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,\mathrm{d}x \right)^{1-\lambda}.$$

On peut raisonner par récurrence sur n.

Dans les questions **23–26**, on considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On dit qu'une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est log-concave si sa loi de probabilité admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, qui est une fonction log-concave sur $\mathbb{R}^n$.

23. Soient n et m deux entiers qui sont $\geqslant 1$. On suppose que $Z = (X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ est une variable aléatoire $\mathcal{F}$-mesurable log-concave. Montrer que X et Y sont toutes des variables aléatoires log-concaves.

24. Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, qui est log-concave. Montrer que, pour toute application linéaire inversible $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$, la variable aléatoire $\varphi(X) + v$ est log-concave.

25. Montrer que, si $X_1, \ldots, X_N$ sont des variables aléatoires log-concave sur $(\Omega, \mathcal{F})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ qui sont indépendantes, alors $X_1 + \cdots + X_N$ est une variable aléatoire log-concave.

26. Montrer que, si X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ qui est un vecteur gaussien, alors pour tout $\lambda \in]0, 1[$ et tous les sous-ensembles compacts A et B de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\mathbb{P}(X \in \lambda A + (1 - \lambda B)) \geqslant \mathbb{P}(X \in A)^{\lambda} \cdot \mathbb{P}(X \in B)^{1-\lambda},$$

où

$$\lambda A + (1 - \lambda)B := \{\lambda x + (1 - \lambda y) \,|\, x \in A,\ y \in B\}.$$