Université Joseph Fourier
M1 Probabilités
2014-2015

Contrôle de connaissance
du 05 novembre 2014

Les documents sont autorisés. Cependant, tout appareil électronique est interdit. Les quatre parties sont indépendantes.

Première partie

On considère le jeu de hasard où on lance un dé à six faces numérotées par 1,2,3,4,5,6 respectivement. Si on obtient le chiffre 6, le joueur relance le dé une seconde fois. On note X la variable aléatoire égale au chiffre obtenu lors du premier lancé. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = 0$ si $X \neq 6$ et Y est égale au chiffre obtenu lors du second lancé si $X = 6$. On supposera que le dé n'est pas truqué, de sorte que les chiffres 1 à 6 apparaissent avec une probabilité égale à chaque lancé. De plus, les résultats des deux lancés sont indépendants.

1. Donner l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ décrivant les scénarios possibles de ce jeu et la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ qui décrit le jeu. Concrétiser les variables aléatoires X, Y.

2. Donner la loi de probabilité du couple de variable aléatoires (X, Y).

3. Déterminer les lois de X et de Y.

4. Calculer les espérances $\mathbb{E}[XY]$, $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$ et $\mathbb{E}[X + Y]$.

Deuxième partie

On considère une variable aléatoire positive T sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ admettant une densité f_T par rapport à la mesure de Lebesgue. On suppose que f_T est continue et strictement positive sur $[0, +\infty[$, et que T possède la propriété suivante[1] : pour tous $t, s \geqslant 0$, on a

$$\mathbb{P}[T - s > t | T > s] = \mathbb{P}[T > t] \ ,$$

où pour tout couple (A, B) d'événements dans $\mathcal{F}$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$, l'expression $\mathbb{P}(A|B)$ désigne la probabilité conditionelle de l'événement A sachant l'événement B, définie comme $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B)$.

5. Montrer que T suit une loi exponentielle, c'est-à-dire $\mathbb{P}(T > t) = e^{-\lambda t}$ pour $t \geqslant 0$ avec certain paramètre $\lambda > 0$.

6. Soit $a > 0$. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $X = \min\{T, a\}$. En déduire la loi ν_X de X.

Tourner SVP

1. Les variables aléatoires possèdant cette propriété modélisent des phénomènes physiques sans mémoire, par exemple une désintégration radioactive.

Troisième partie

Soit F une fonction de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ satisfaisant les propriétés suivantes :

(i) F est croissante ;

(ii) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$;

(iii) F est continue à droite (c'est-à-dire $\lim_{\varepsilon\to 0+} F(x+\varepsilon) = F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$)

Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que F soit la fonction de répartition de X.

Soient $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1])$ la tribu borélienne de $[0,1]$, $\mathbb{P}$ la restriction de la mesure de Lebesgue sur $(\Omega, \mathcal{F})$, et X la variable aléatoire sur Ω définie comme

$$X(\omega) = \inf\{x \in \mathbb{R} \ : \ F(x) \geqslant \omega\} \quad \forall\, \omega \in [0,1]\ .$$

7. Montrer que $X(\omega) \in]-\infty, +\infty[$ pour tout $\omega \in]0,1[$.

8. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \leqslant x \ \Leftrightarrow\ \omega \leqslant F(x)$. En déduire que X est $\mathcal{F}$-mesurable.

9. Montrer que la fonction de répartition de X est égale à F.

10. On définit de même $Y(\omega) = \inf\{x \in \mathbb{R} \ : \ F(x) > \omega\}$. Montrer que Y est $\mathcal{F}$-mesurable et que Y a également F pour fonction de répartition.

11. En déduire que les variables aléatoires X et Y ont même loi. En utilisant l'égalité $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X]$, montrer que $Y(\omega) = X(\omega)$ pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$.

Quatrième partie

Soit $\{X_1, \ldots, X_n\}$ une famille de variables aléatoires indépendantes, qui suivent la même loi de probabilité, où $n \geqslant 1$ est un entier. On suppose en outre qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\mathbb{E}[\exp(\alpha|X_1|)] < +\infty.$$

On désigne par S_n la somme $X_1 + \cdots + X_n$.

12. Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$, la variable aléatoire X_1 admet le moment d'ordre k (autrement dit, la variable aléatoire X_1^k est intégrable).

Dans la suite, on désigne par m l'espérance de la variable aléatoire X_1. On suppose que $m > 0$. Le but de la partie est de comprendre la vitesse de convergence de la probabilité de queue dans la loi de grand nombre. Plus précisément, on étudiera le comportement asymptotique de la probabilité de queue $\mathbb{P}(S_n \geqslant na)$ lorsque n tend vers l'infini, où a est une constante qui est $> m$.

13. En utilisant l'inégalité de Hölder, montrer que l'ensemble $I \subset \mathbb{R}$ des $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbb{E}[\exp(\theta X_1)] < +\infty$ est un intervalle dans $\mathbb{R}$, et que la fonction $\Gamma : I \to \mathbb{R}_+$ qui envoie θ en $\ln \mathbb{E}[\exp(\theta X_1)]$ est convexe.

Tourner SVP

14. Montrer que l'intervalle I contient un voisinage ouvert de $0 \in \mathbb{R}$. Déterminer la valeur de $\Gamma(0)$.

15. Montrer que

$$x \mapsto \Gamma^*(x) := \sup_{\theta \in I}(\theta x - \Gamma(\theta))$$

définit une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0, +\infty]$.

16. En utilisant l'inégalité de Jensen, montrer que $\Gamma^*(m) = 0$.

17. En déduire que la fonction Γ^* est croissante sur l'intervalle $[m, +\infty[$.

18. Montrer que, pour tout $x > m$, on a

$$\Gamma^*(x) = \sup_{\theta \in I \cap [0,+\infty[}(\theta x - \Gamma(\theta)).$$

19. Montrer que, pour tout $x > m$, on a

$$\forall\, \theta \geqslant 0, \quad \mathbb{P}(S_n \geqslant nx) \leqslant \exp(n\Gamma(\theta) - n\theta x).$$

20. En déduire que

$$\mathbb{P}(S_n \geqslant nx) \leqslant \exp(-n\Gamma^*(x))$$

quel que soit $x > m$.