Université Joseph Fourier
M1 Probabilités
2014-2015

Contrôle de connaissance
du 05 novembre 2014

Les documents sont autorisés. Cependant, tout appareil électronique est interdit. Les quatre parties sont indépendantes.

Première partie

On considère le jeu de hasard où on lance un dé à six faces numérotées par 1,2,3,4,5,6 respectivement. Si on obtient le chiffre 6, le joueur relance le dé une seconde fois. On note X la variable aléatoire égale au chiffre obtenu lors du premier lancé. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = 0$ si $X \neq 6$ et Y est égale au chiffre obtenu lors du second lancé si $X = 6$. On supposera que le dé n'est pas truqué, de sorte que les chiffres 1 à 6 apparaissent avec une probabilité égale à chaque lancé. De plus, les résultats des deux lancés sont indépendants.

1. Donner l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ décrivant les scénarios possibles de ce jeu et la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ qui décrit le jeu.
Solution. $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$, $\mathcal{F}$ est la famille de tous les sous-ensemble de Ω, et $\mathbb{P}(A) = (1/36)\#A$ pour tout $A \in \mathcal{F}$. On a $X(i,j) = i$ et $Y(i,j) = \mathbb{1}_{\{i=6\}} j$. (Il existe d'autres constructions possibles pour $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$).

2. Donner la loi de probabilité du couple de variable aléatoires (X, Y).
Solution. Le couple de variable aléatoire (X, Y) prend valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, soit $\delta_{(a,b)}$ la mesure de Dirac concentrée en (a, b). La loi de (X, Y) est

$$\sum_{i \in \{1,\dots,5\}} \frac{1}{6} \delta_{(i,0)} + \sum_{j \in \{1,\dots,6\}} \frac{1}{36} \delta_{(6,j)}$$

3. Déterminer les lois de X et de Y.
Solution. La loi de X est

$$\sum_{i \in \{1,\dots,6\}} \frac{1}{6} \delta_i,$$

la loi de Y est

$$\frac{5}{6} \delta_0 + \sum_{i \in \{1,\dots,6\}} \frac{1}{36} \delta_i$$

4. Calculer les espérances $\mathbb{E}[XY]$, $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$ et $\mathbb{E}[X + Y]$.
Solution. La loi de XY est

$$\frac{5}{6} \delta_0 + \sum_{j \in \{1,\dots,6\}} \frac{1}{36} \delta_{6j}.$$

Donc $\mathbb{E}[XY] = \frac{1}{6}(1 + \cdots + 6) = 7/2$. En outre, on a $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{6}(1 + \cdots + 6) = 7/2$, $\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{36}(1 + \cdots + 6) = 7/12$ et $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = 49/12$.

Deuxième partie

On considère une variable aléatoire positive T sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ admettant une densité f_T par rapport à la mesure de Lebesgue. On suppose que f_T est continue et strictement positive sur $[0, +\infty[$, et que T possède la propriété suivante[1] : pour tous $t, s \geqslant 0$, on a

$$\mathbb{P}[T - s > t | T > s] = \mathbb{P}[T > t] \ ,$$

où pour tout couple (A, B) d'événements dans $\mathcal{F}$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$, l'expression $\mathbb{P}(A|B)$ désigne la probabilité conditionelle de l'événement A sachant l'événement B, définie comme $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B)$.

5. Montrer que T suit une loi exponentielle, c'est-à-dire $\mathbb{P}(T > t) = e^{-\lambda t}$ pour $t \geqslant 0$ avec certain paramètre $\lambda > 0$.
Solution. Pour tout $t \geqslant 0$, soit $F(t)$ la valeur $\mathbb{P}(T > t)$. Par définition, on a $F(s+t) = F(s)F(t)$ pour tous $s, t \geqslant 0$. Comme la loi de T admet une densité strictement positive sur $[0, +\infty[$, la fonction F est non-nul sur $[0, +\infty[$ et est différentiable. En particulier, on a $F(0) = 1$. En outre, pour tout $t > 0$

$$F'(t) = \lim_{s \to 0+} \frac{F(t+s) - F(t)}{s} = F(t) \lim_{s \to 0+} \frac{F(s) - 1}{s} = -f_T(0)F(t),$$

d'où $F(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$ avec $\lambda = f_T(0)$.

6. Soit $a > 0$. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $X = \min\{T, a\}$. En déduire la loi ν_X de X.
Solution. Pour $t \geqslant 0$, on a

$$\mathbb{P}(X > t) = \mathbb{1}_{]-\infty, a[}(t)\mathbb{P}(T > t) = \mathbb{1}_{]-\infty, a \wedge 0[}(t) + \mathbb{1}_{[0, a[}(t)\mathrm{e}^{-\lambda t},$$

d'où

$$\nu_X = \mathbb{1}_{[0, a[}(t)\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-\lambda a}\delta_a$$

Troisième partie

Soit F une fonction de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$ satisfaisant les propriétés suivantes :

(i) F est croissante ;

(ii) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$;

(iii) F est continue à droite (c'est-à-dire $\lim_{\varepsilon \to 0+} F(x + \varepsilon) = F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$)

1. Les variables aléatoires possèdant cette propriété modélisent des phénomènes physiques sans mémoire, par exemple une désintégration radioactive.

Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que F soit la fonction de répartition de X.

Soient $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1])$ la tribu borélienne de $[0,1]$, $\mathbb{P}$ la restriction de la mesure de Lebesgue sur $(\Omega, \mathcal{F})$, et X la variable aléatoire sur Ω définie comme

$$X(\omega) = \inf\{x \in \mathbb{R} \ : \ F(x) \geqslant \omega\} \quad \forall\, \omega \in [0,1] \ .$$

7. Montrer que $X(\omega) \in]-\infty, +\infty[$ pour tout $\omega \in]0,1[$.
Solution. La condition (ii) montre qu'il existe $M > 0$ tel que $F(x) \geqslant \omega$ lorsque $x \leqslant -M$ et $F(x) < \omega$ lorsque $x \geqslant M$. On a alors $X(\omega) \in [-M, M]$.

8. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \leqslant x \ \Leftrightarrow \ \omega \leqslant F(x)$. En déduire que X est $\mathcal{F}$-mesurable.
Solution. Par définition, il existe une suite décroissante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $X(\omega)$ telle que $F(x_n) \geqslant \omega$ pour tout n. Comme F est supposée être continue à droite, on a $F(X(\omega)) \geqslant \omega$. Si $X(\omega) \leqslant x$, on a alors $F(x) \geqslant \omega$ car F est croissante. Réciproquement, si $F(x) \geqslant \omega$, alors x appartient à l'ensemble qui définit $X(\omega)$ et donc $X(\omega) \leqslant x$.

9. Montrer que la fonction de répartition de X est égale à F.
Solution.

$$\mathbb{P}(X \leqslant x) = \int_{[0,F(x)]} 1 \, \mathrm{d}x = F(x).$$

10. On définit de même $Y(\omega) = \inf\{x \in \mathbb{R} \ : \ F(x) > \omega\}$. Montrer que Y est $\mathcal{F}$-mesurable et que Y a également F pour fonction de répartition.
Solution. On a $\{Y(\omega) > y\} = \{F(y) \leqslant \omega\}$ et donc $\{Y(\omega) \leqslant y\} = \{F(y) > \omega\}$, d'où

$$\mathbb{P}(Y \leqslant y) = \int_{[0,F(y)[} 1 \, \mathrm{d}x = F(y).$$

11. En déduire que les variables aléatoires X et Y ont même loi. En utilisant l'égalité $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X]$, montrer que $Y(\omega) = X(\omega)$ pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$.
Solution. Les variables aléatoires X et Y ont la même fonction de répartition, donc admet la même loi. En particulier, $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$. En outre, on a $X \leqslant Y$. Donc $Y - X$ est positive et admet 0 comme espérance, i.e. $Y - X = 0$ p.s..

Quatrième partie

Soit $\{X_1, \ldots, X_n\}$ une famille de variables aléatoires indépendantes, qui suivent la même loi de probabilité, où $n \geqslant 1$ est un entier. On suppose en outre qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\mathbb{E}[\exp(\alpha |X_1|)] < +\infty.$$

On désigne par S_n la somme $X_1 + \cdots + X_n$.

12. Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$, la variable aléatoire X_1 admet le moment d'ordre k (autrement dit, la variable aléatoire X_1^k est intégrable).
Solution. On a

$$\mathrm{e}^{\alpha|X_1|} = \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!}\alpha^k |X_1|^k.$$

Si $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\alpha|X_1|}] < +\infty$, alors pour tout k, on a $\mathbb{E}[|X_1|^k] < +\infty$.

Dans la suite, on désigne par m l'espérance de la variable aléatoire X_1. On suppose que $m > 0$. Le but de la partie est de comprendre la vitesse de convergence de la probabilité de queue dans la loi de grand nombre. Plus précisément, on étudiera le comportement asymptotique de la probabilité de queue $\mathbb{P}(S_n \geqslant na)$ lorsque n tend vers l'infini, où a est une constante qui est $> m$.

13. En utilisant l'inégalité de Hölder, montrer que l'ensemble $I \subset \mathbb{R}$ des $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbb{E}[\exp(\theta X_1)] < +\infty$ est un intervalle dans $\mathbb{R}$, et que la fonction $\Gamma : I \to \mathbb{R}_+$ qui envoie θ en $\ln \mathbb{E}[\exp(\theta X_1)]$ est convexe.
Solution. Montrons que I est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}$. Soient θ_1 et θ_2 deux éléments de I, et $\varepsilon \in]0,1[$. Soient $p = 1/\varepsilon$ et $q = 1/\varepsilon$. On a

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{(\varepsilon\theta_1+(1-\varepsilon)\theta_2)X_1}] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\varepsilon\theta_1 X_1}\cdot \mathrm{e}^{(1-\varepsilon)\theta_2 X_1}] \leqslant \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\varepsilon p\theta_1 X_1}]^{1/p}\cdot \mathbb{E}[\mathrm{e}^{(1-\varepsilon)q\theta_1 X_1}]^{1/q} = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\theta_1 X_1}]^{\varepsilon}\cdot \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\theta_2 X_1}]^{1-\varepsilon}.$$

On en déduit donc que $\varepsilon\theta_1 + (1-\varepsilon)\theta_2 \in I$ et que la fonction $\theta \mapsto \ln \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\theta X_1}]$ est convexe.

14. Montrer que l'intervalle I contient un voisinage ouvert de $0 \in \mathbb{R}$. Déterminer la valeur de $\Gamma(0)$.
Solution. L'intervalle I contient $]-\alpha, \alpha[$. On a

$$\Gamma(0) = \ln \mathbb{E}[1] = 0$$

15. Montrer que

$$x \mapsto \Gamma^*(x) := \sup_{\theta\in I}(\theta x - \Gamma(\theta))$$

définit une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0, +\infty]$.
Solution. Comme $0 \in I$ et $\Gamma(0) = 0$, on obtient que $\Gamma^*(x) \geqslant 0$ pour tout x. En outre, la fonction Γ^* s'écrit comme la borne supérieure d'une famille de fonctions affines, donc est une fonction convexe.

16. En utilisant l'inégalité de Jensen, montrer que $\Gamma^*(m) = 0$.
Solution. Comme la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{\theta x}$ est convexe, on a

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\theta X_1}] \geqslant \mathrm{e}^{\theta m},$$

d'où $\Gamma(\theta) \geqslant \theta m$ pour tout $\theta \in I$. On en déduit que $\Gamma^*(m) \leqslant 0$ et donc $\Gamma^*(m) = 0$.

17. En déduire que la fonction Γ^* est croissante sur l'intervalle $[m, +\infty[$.
Solution. On a $\Gamma^*(m) = \Gamma^*(0) = 0$. Comme $m > 0$, la convexité de la fonction Γ^* montre que la fonction Γ^* est croissante sur $[m, +\infty[$.

18. Montrer que, pour tout $x > m$, on a

$$\Gamma^*(x) = \sup_{\theta \in I \cap [0,+\infty[} (\theta x - \Gamma(\theta)).$$

Solution. On a

$$\theta x - \Gamma(\theta) \leqslant \theta(x - m).$$

Si $x > m$, alors on a $\theta x - \Gamma(\theta) < 0$ quand $\theta < 0$.

19. Montrer que, pour tout $x > m$, on a

$$\mathbb{P}(S_n \geqslant nx) \leqslant \exp(n\Gamma(\theta) - n\theta x).$$

Indication : on peut comparer $\mathbb{1}_{\{S_n \geqslant nx\}}$ et $\exp(\theta S_n - n\theta x)$.
Solution. On a

$$\mathbb{1}_{\{S_n \geqslant nx\}} \leqslant \exp(\theta S_n - n\theta x)$$

lorsque $\theta \geqslant 0$. On a donc

$$\mathbb{P}(S_n \geqslant nx) \leqslant \mathbb{E}[\exp(\theta S_n - n\theta x)] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\theta X_1}]^n \cdot \mathrm{e}^{-n\theta x}$$

20. En déduire que

$$\mathbb{P}(S_n \geqslant nx) \leqslant \exp(-n\Gamma^*(x)).$$

quel que soit $x > m$.
Solution. C'est une conséquence immédiate des deux questions précédentes.