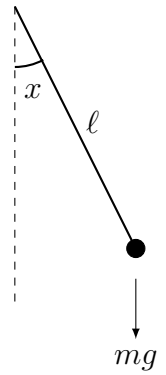
Université Joseph Fourier
L2 MAT233
2014-2015

Contrôle de connaissance
du 07 janvier 2015

Les documents sont autorisés. Cependant, tout appareil électronique est interdit. Lire attentivement l'ensemble des énoncés avant de répondre aux questions.

Première partie

Le but de cette partie est d'étudier l'équation du pendule. On considère une tige inextensible de longueur ℓ, suspendue par une extrémité et portant à son autre extrémité un point de masse m. On désigne par x l'angle d'écart par rapport à la verticale.



L'accélération angulaire $x''(t)$ du pendule est proportionnelle au moment de son poids. Autrement dit, la fonction $x(.)$ satisfait à l'équation différentielle suivante

$$x''(t) = -\frac{mg}{\ell}\sin(x(t)),$$

où g désigne l'accélération normale de la pesanteur terrestre. Dans la suite, on désigne par λ la constante $\sqrt{mg/\ell}$. L'équation au-dessus devient

$$x''(t) = -\lambda^2 \sin(x(t)). \qquad (*)$$

1. En introduisant la variable $y = x'$, transformer l'équation $(*)$ en une équation différentielle d'ordre 1.

2. On désigne par V l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$\varphi''(t) = -\lambda^2\varphi(t). \qquad (**)$$

Montrer que V est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.

TSVP.

3. Vérifier que les fonctions f et g définies comme

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \cos(\lambda t) \quad \text{et} \quad g(t) = \sin(\lambda t)$$

satisfont à l'équation $(**)$.

4. Montrer que les fonctions f et g ne sont pas colinéaires.

5. En déduire que toute solution de l'équation $(**)$ est de la forme

$$\varphi(t) = r\sin(\lambda t + \theta),$$

où r et θ sont deux constantes réelles, $r \geqslant 0$. Montrer que la fonction φ est périodique de période $2\pi/\lambda$.

6. Soit $x(.)$ une solution de l'équation $(*)$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction

$$\frac{1}{2}x'(t)^2 - \lambda^2\cos(x(t))$$

est constante.

Dans la suite, on suppose que le pendule est initialement placé à la position d'angle d'écart $x_0 \in]0, \pi/2[$ et de vitesse initiale 0. On admet que l'équation $(*)$ a une unique solution $x(.)$ sur $\mathbb{R}$ qui vérifie les conditions initiales $x(0) = x_0$ et $x'(0) = 0$.

7. Montrer que $\cos(x(t)) \geqslant \cos(x_0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

8. En déduire que $|x(t)| \leqslant x_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On peut utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

9. Montrer qu'il existe une constante $\varepsilon > 0$ tel que $x'(t) < 0$ pour tout $t \in]0, \varepsilon[$. (*Indication :* on peut vérifier qu'il existe un voisinage de 0 tel que la fonction $x(.)$ prenne valeurs dans $]0, \pi/2[$ sur ce voisinage.)

10. Soit

$$T := \inf\{t > 0 \,|\, x'(t) \geqslant 0\}.$$

Montrer que

$$\forall\, t \in [0, T[, \quad x'(t) = -\lambda\sqrt{2(\cos(x(t)) - \cos(x_0))}$$

et

$$\lim_{t \to T} x(t) = -x_0.$$

En déduire que

$$T = \frac{x_0}{\lambda\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\cos(ux_0) - \cos(x_0)}} < +\infty$$

et que la fonction $x(.)$ est périodique de période $2T$ (on peut montrer que la fonction $\widetilde{x}(.)$ définie comme $\widetilde{x}(t) = -x(t+T)$ vérifie aussi l'équation $(*)$ avec les mêmes conditions initiales). **TSVP.**

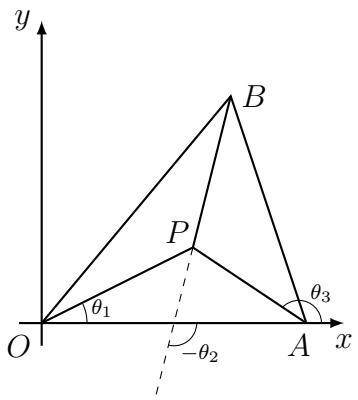
Deuxième partie

Dans cette partie, on considère un triangle $\Delta = OAB$ inscrit dans un plan muni d'un système de coordonnées comme dans le graphe au-dessous. On suppose que le point O est placé à l'orgine $(0,0)$ du plan, et que les points A et B sont de coordonnées $(a,0)$ et (b,c) respectivement, où a, b et c sont des constantes telles que $0 < b < a$ et $c > \sqrt{ab - b^2}$ (de sorte que les trois angles de Δ soient tous aigus). On munit le plan de la norme $\|.\|$ telle que

$$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Rappelons que si $v = (x,y)$ est un vecteur non-nul dans le plan et si $\theta \in [-\pi, \pi[$ désigne l'angle entre v et l'abscisse Ox, alors on a

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos(\theta) \quad \text{et} \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin(\theta).$$



Le but de cette partie est d'étudier le problème suivant. Étant donné un point P dans le triangle Δ, quand est-ce que la somme des distances entre P et les trois sommets du triangle atteint son minimum ? Pour étudier ce problème, on introduit une fonction S définie sur le triangle Δ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui envoie tout $(x,y) \in \Delta$ en

$$S(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-a)^2+y^2} + \sqrt{(x-b)^2+(y-c)^2}.$$

11. Calculer les dérivées partielles

$$\frac{\partial S}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial S}{\partial y}$$

sur l'intérieur U de Δ.

12. Montrer que la fonction S est de classe C^1 sur U.

TSVP.

13. Pour tout point $P \in U$, soient $\theta_1(P)$ l'angle entre les vecteurs OP et Ox, $\theta_2(P)$ l'angle entre les vecteurs BP et Ox, et $\theta_3(P)$ l'angle entre les vecteurs AP et Ox. Exprimer les dérivées partielles

$$\frac{\partial S}{\partial x}(P) \quad \text{et} \quad \frac{\partial S}{\partial y}(P)$$

en fonction de $\theta_1(P)$, $\theta_2(P)$ et $\theta_3(P)$.

14. On suppose que $P \in U$ est un point critique de la fonction S. Montrer que

$$\big(\cos(\theta_1(P)) + \cos(\theta_2(P))\big)^2 + \big(\sin(\theta_1(P)) + \sin(\theta_2(P))\big)^2 = 1.$$

En déduire que $\cos(\theta_2(P) - \theta_1(P)) = -1/2$.

15. Montrer que la fonction S atteint son minimum sur Δ en un point P_0.

16. Soit $Q = (b, 0)$ la projection du point B sur le segment de droite OA. Montrer que la restriction de la fonction S au segment de droite OA atteint son minimal en Q.

17. En utilisant le développement de Taylor, montrer que $S(b, \varepsilon) < S(Q)$ lorsque $\varepsilon > 0$ est assez petit. En déduire $S(Q) > S(P_0)$.

18. Montrer que P_0 appartient à l'intérieur U du triangle Δ.

19. Montrer que $\theta_3(P_0) - \theta_1(P_0) = \theta_1(P_0) - \theta_2(P_0) = 2\pi/3$.

20. En déduire que le point minimal P_0 de la fonction S est unique.