Université Joseph Fourier
L2 MAT233
2014-2015

Contrôle de connaissance
du 05 novembre 2014

Les documents sont autorisés. Cependant, tout appareil électronique est interdit. Les deux parties sont indépendantes.

Dans toute l'épreuve, l'expression m désigne un entier qui est $\geqslant 1$. On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^m$ de la norme $\|.\|_{\sup}$, définie comme

$$\forall\, \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m, \quad \|\boldsymbol{x}\|_{\sup} := \max_{i \in \{1,\ldots,m\}} |x_i|.$$

Première partie

Le but de cette partie est d'étudier les fonctions semi-continues. Soit A un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}^m$, muni de la métrique $d : A \times A \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall\, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in A \times A, \quad d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_{\sup}.$$

On dit qu'une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ est *semi-continue supérieurement* si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'ensemble

$$\{\boldsymbol{x} \in A \,|\, f(\boldsymbol{x}) \geqslant t\}$$

est un fermé de A, ou de façon équivalente, l'ensemble $\{\boldsymbol{x} \in A \,|\, f(\boldsymbol{x}) < t\}$ est un ouvert de A.

1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'ensemble $[t, +\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

2. Soit $\varphi : A \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que φ est semi-continue supérieurement.

3. Soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions définies sur A qui sont semi-continues supérieurement, où $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$. Montrer que la fonction $f = \max(f_1, \ldots, f_n)$ est semi-continue supérieurement.

4. Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille non-vide de fonctions définies sur A qui sont semi-continues supérieurement. On suppose que, pour tout $\boldsymbol{x} \in A$, $f(\boldsymbol{x}) := \inf_{i \in I} f_i(\boldsymbol{x})$ appartient à $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction $f : A \to \mathbb{R}$ est semi-continue supérieurement.

5. Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie comme

$$\forall\, x \in [0,1], \quad g_n(x) := x^n + (1-x)^n.$$

Déterminer $g(x) := \inf_{n \in \mathbb{N},\, n \geqslant 1} g_n(x)$ pour tout $x \in [0,1]$.

6. Montrer que la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie dans la question précédente est semi-continue supérieurement mais pas continue.

7. Soient $\boldsymbol{a}$ un point de A et $(\boldsymbol{x}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans A qui converge vers $\boldsymbol{a}$. Montrer que, pour toute fonction $f : A \to \mathbb{R}$ qui est semi-continue supérieurement, on a

$$f(\boldsymbol{a}) \geqslant \limsup_{n \to +\infty} f(\boldsymbol{x}^{(n)}).$$

Dans les questions suivantes, on suppose que A est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^m$. On fixe en outre une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ qui est semi-continue supérieurement.

8. En utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass, montrer qu'il existe une suite $(\boldsymbol{x}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ dans A qui converge vers un point de A et telle que

$$\lim_{n\to+\infty} f(\boldsymbol{x}^{(n)}) = \sup_{\boldsymbol{y}\in A} f(\boldsymbol{y}).$$

9. Montrer que la fonction f atteint son maximum en un point de A. En déduire que la fonction f est bornée supérieurement.

10. La fonction f atteint-elle nécessairement son infimum en un point de A ? Justifier votre réponse par une démonstration ou un contre-exemple.

Deuxième partie

Dans cette partie, on considère un *corps convexe* Δ dans $\mathbb{R}^m$, c'est-à-dire un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^m$ dont l'intérieur Δ° est non-vide et qui vérifie la condition suivante :

$$\forall\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \Delta\times\Delta,\ \forall\,\lambda\in[0,1],\quad \lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y}\in\Delta.$$

On dit qu'une fonction $f : \Delta \to \mathbb{R}$ est *convexe* si, pour tout $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \Delta\times\Delta$ et tout $\lambda\in[0,1]$, on a

$$f(\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y}) \leqslant \lambda f(\boldsymbol{x}) + (1-\lambda) f(\boldsymbol{y}).$$

Dans toute la partie, f désigne une fonction réelle définie sur Δ qui est convexe. Dans les questions **11-15**, on fixe un point $\boldsymbol{a}$ dans Δ° et un vecteur $\boldsymbol{h}$ dans $\mathbb{R}^m$.

11. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h}\in\Delta^\circ$ pour tout $t\in\mathbb{R}$, $|t|<\varepsilon$.

12. On désigne par $I_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}}$ l'ensemble des $t>0$ tels que $\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h}\in\Delta$. Montrer que, si $\boldsymbol{h}\neq\boldsymbol{0}$, alors $I_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}}$ est un intervalle de la forme $]0, T_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}}]$, où $T_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}}$ est un nombre réel strictement positif. Décrire l'ensemble $I_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{0}}$.

13. Montrer que l'application $\Phi_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}}$ de $I_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}}$ vers $\mathbb{R}$ qui envoie t en

$$\frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{a})}{t},$$

est croissante. (*Indication* : étant donnés s et t deux nombres dans $I_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}}$ tels que $s\leqslant t$, trouver $\lambda\in[0,1]$ tel que $\boldsymbol{a}+s\boldsymbol{h}=(1-\lambda)\boldsymbol{a}+\lambda(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h})$.)

14. Montrer que, pour tout $t\in I_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}}$, on a

$$\frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{a})}{t} \geqslant \frac{f(\boldsymbol{a})-f(\boldsymbol{a}-\varepsilon\boldsymbol{h})}{\varepsilon},$$

où ε est la constante obtenue dans la question **11**. En déduire que la limite

$$\partial_{\boldsymbol{h}}^{+} f(\boldsymbol{a}) := \lim_{t\to 0+} \frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{a})}{t}$$

existe dans $\mathbb{R}$, où $\lim\limits_{t\to 0+}$ désigne $\lim\limits_{t>0,\,t\to 0}$.

15. On suppose que la fonction f est différentiable en $\boldsymbol{a}$ et on désigne par $Df(\boldsymbol{a}) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ la différentielle de la fonction f en $\boldsymbol{a}$. Montrer que, pour tout $\boldsymbol{x} \in \Delta$ on a

$$f(\boldsymbol{x}) \geqslant f(\boldsymbol{a}) + Df(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}).$$

(*Indication* : Montrer que $f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) \geqslant \partial_{\boldsymbol{h}}^{+} f(\boldsymbol{a})$ avec $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$.)

16. Soit $\boldsymbol{a}$ un point dans Δ°. Montrer qu'il existe un $\delta > 0$ tel que $B(\boldsymbol{a}; \delta) \subset \Delta^\circ$, où $B(\boldsymbol{a}; \delta)$ désigne la boule ouverte centrée en $\boldsymbol{a}$ et de rayon δ par rapport à la norme $\|.\|_{\sup}$. Montrer que la fonction f est bornée sur la boule fermée $\overline{B(\boldsymbol{a}; \delta)}$. (*Indication* : Soit $(\boldsymbol{e}^{(i)})_{i=1}^m$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$. Pour tout $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \{-1, 0, 1\}^m$, soit

$$\boldsymbol{x}^{(\alpha)} = \boldsymbol{a} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \delta \boldsymbol{e}^{(i)} \in \overline{B(\boldsymbol{a}; \delta)}.$$

Montrer que, pour tout $\boldsymbol{y} \in \overline{B(\boldsymbol{a}, \delta)}$, il existe des nombres $\epsilon_\alpha \in [0, 1]$, $\alpha \in \{-1, 0, 1\}^m$ tels que $\epsilon := \sum_{\alpha \in \{-1,0,1\}^m} \epsilon_\alpha = 1$ et que $\sum_{\alpha \in \{-1,0,1\}^m} \epsilon_\alpha \boldsymbol{x}^{(\alpha)} = \boldsymbol{y}$.)

17. En déduire que f est continue en tout point de Δ°.

18. Soit $\boldsymbol{a}$ un point de Δ°. Montrer que la fonction $(\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^m) \mapsto \partial_{\boldsymbol{h}}^{+} f(\boldsymbol{a})$ est sous-additive. Autrement dit,

$$\forall\, (\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}') \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m, \quad \partial_{\boldsymbol{h}+\boldsymbol{h}'}^{+} f(\boldsymbol{a}) \leqslant \partial_{\boldsymbol{h}}^{+} f(\boldsymbol{a}) + \partial_{\boldsymbol{h}'}^{+} f(\boldsymbol{a}).$$

19. Soit $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ une application sous-additive telle que $\varphi(t\boldsymbol{x}) = t\varphi(\boldsymbol{x})$ pour tout $t \geqslant 0$ et tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$. On suppose que $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ est une application linéaire telle que $\varphi(\boldsymbol{x}) \leqslant \psi(\boldsymbol{x})$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$. Montrer que $\varphi = \psi$. (*Indication* : appliquer la sous-additivité de φ à $\boldsymbol{0} = \boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x})$.)

20. Soit $\boldsymbol{a}$ un point de Δ°. On suppose que $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ est une fonction telle que $g(\boldsymbol{x}) \geqslant f(\boldsymbol{x})$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \Delta$ et que $g(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{a})$. Montrer que, si la fonction g est différentiable en $\boldsymbol{a}$, alors il en est de même de f. De plus on a $Df(\boldsymbol{a}) = Dg(\boldsymbol{a})$.