PROBABILITÉ ET CONVEXITÉ : APPLICATIONS À LA GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE (GROUPE DE LECTURE À L'ENS LYON 2015)

Huayi Chen

Le but de ce groupe de lecture est de comprendre les méthodes probabilistes dans l'étude des problèmes de convexité. La première partie du groupe de lecture concentre sur les outils probabilists. Comme complémentaire du cours de probabilité du deuxième semestre, on étudie des sujets comme intégrale de Daniell, mesure de Radon, espérance conditionnelle etc. Dans la deuxième partie, on étudie l'approche probabiliste dans la géométrie convexe. Dans la troisième et la dernière partie, on présente quelques applications à la géométrie algébrique.

Les références figurant dans la description des exposés sont à titre indicatif. Les orateurs sont libres à choisir leurs approches et références.

Exposés 1-2. Intégrale de Daniell

L'intégrale de Daniell est une approche fonctionnelle de la théorie d'intégration. Elle généralise naturellement l'intégrale de Riemann et permet de reconstruire la théorie d'intégration de Lebesgue sans faisant appel à la théorie des mesures. L'approche de Daniell a un caractéristique axiomatique. On commence par un espace vectoriel S de fonctions définies sur un ensemble non-vide Ω et une forme linéaire I sur S. Dans la pratique, S est l'ensemble des fonctions "simples" dont l'intégrale peut être facilement définie. Par exemple, dans le cas où Ω est l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, on peut prendre S comme l'espace des fonctions étagées. Pour que la théorie d'intégration à la Daniell soit bien établie, il faut imposer trois conditions comme la suite :

(1) pour toutes fonctions $f, g \in S$, on a $\min(f, g) \in S$,

(2) si f et g sont des fonctions dans S telles que $f \leqslant g$, alors $I(f) \leqslant I(g)$,

(3) si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fonctions dans S qui converge simplement vers la fonction nulle, alors $\lim_{n\to+\infty} I(f_n) = 0$.

Ces conditions permettent d'étendre l'opérateur I sur l'ensemble des limites monotones des fonctions dans S. On désigne par $S^{\uparrow}$ l'ensemble des fonctions réelles sur Ω qui peuvent s'écrire comme la limite croissante d'une suite dans S. Il s'avère que l'opérateur I s'étend par passage à la limite en une application de $S^{\uparrow}$ vers $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. De façon similaire, l'opérateur I s'étend naturellement à l'ensemble $S^{\downarrow}$ des fonctions réelles sur Ω qui s'écrivent comme la limite d'une suite décroissante dans S. Daniell a montré que, l'ensemble $\widetilde{S}$ des fonctions $h : \Omega \to \mathbb{R}$ telles que

$$\sup_{g\in S^{\downarrow},\, g\leqslant h} I(g) = \inf_{f\in S^{\uparrow},\, f\geqslant h} I(f) \in \mathbb{R}$$

est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions réelles sur $\mathbb{R}$ qui est stable par l'opérateur $(f, g) \mapsto \min(f, g)$. De plus, la forme linéaire I s'étend de façon unique en une forme linéaire sur $\widetilde{S}$ qui vérifie les conditions (2) et (3) comme ci-dessus. Cette construction est très similaire à l'intégrale de Riemann : il suffit de remplacer dans la formule précédente les ensembles $S^{\uparrow}$ et $S^{\downarrow}$ par S pour retrouver la définition d'une fonction intégrable au sens de Riemann. En même temps, dans le cas où S est l'espace des fonctions étagées et I est l'opérateur d'inégration usuel, l'ensemble $\widetilde{S}$ contient toutes les fonctions intégrables au sens de Lebesgue, et la forme linéaire étendue coïncide avec l'intégrale de Lebesgue.

Le but de ces exposés est de présenter cette théorie en faisant la comparaison avec le cours d'intégration du premier semestre.

Référence. — R. M. Ingle, *The Daniell approach to integration and measure* Georgia Institute of Technology, 1969.
`https://smartech.gatech.edu/bitstream/handle/1853/28658/ingle_richard_m_196905_ms_236285.pdf`

Exposés 3-4. Mesures de Radon

Dans ces exposés, on présente la théorie des mesures de Radon. Une mesure de Radon est une mesure borélienne sur un espace topologique localement compact qui est intérieurement régulière et localement finie (pour simplifier la présentation, on peut supposer que l'espace topologique admet une base de topologie dénombrable). Le théorème de Riesz relie les mesures de Radon aux fonctionnelles linéaires positive sur l'espace vectoriel des fonctions continues à support compact. Cette correspondance peut être mieux comprise en utilisant l'intégrale de Daniell.

L'espace des mesures de Radon finie sur un espace topologique localement compact à base de topologie dénombrable peut être muni d'une topologie de

convergence étroite. Cette topologie a beaucoup de propriétés intéressantes. Par exemple, elle est métrisable. En outre, si f est une fonction semi-continue inférieurement et positive, alors l'intégrale de f par rapport aux mesures de Radon bornées définit une fonction semi-continue inférieurement sur l'espace des mesures de Radon bornées par rapport à la topologie étroite. Ces résultats sont importants dans la compréhension de la convergence des variables aléatoires dans la théorie des probabilités.

Référence. — N. Bourbaki, *Intégration, chapitres 1-4*, Hermann, 1965.

Exposés 5-6. Désintégration, espérance conditionnelle

La désintégration est une technique importante de la théorie des probabilité (ou plus généralement, de la théorie des mesures). Elle permet de définir d'une façon rigoureuse la "restriction" d'une mesure à un sous-ensemble négligeable, qui est étroitement liée à la contruction d'une version régulière de la loi conditionnelle.

Étant donnés deux espaces de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(E, \mathcal{E}, \mu)$ et une application mesurable $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E, \mathcal{E})$ telle que μ s'identifie à l'image directe de $\mathbb{P}$ par f, on cherche une famille $\mathcal{E}$-mesurable de mesures de probabilité $(x \in \mathbb{E}) \mapsto \mathbb{P}_x$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que

$$\mathbb{P} = \int_E \mathbb{P}_x \, \mu(\mathrm{d}x)$$

et que $\mathbb{P}_x$ soit portée sur $f^{-1}(\{x\})$. Le but de ces exposés est donc de comprendre la démonstration du théorème de Radon-Nikodym et du théorème de désintégration, ainsi que diverses applications de ces théorèmes, notamment la construction de l'espérance conditionnelle.

Référence. — C. Dellacherie, P.-A. Meyer *Probabilité et potentielle* (chapitre III), Hermann, 1975

Exposés 7-8. Inégalités de Prékopa-Leindler et de Brunn-Minkowski

Dans ces exposés, on présente l'inégalité de Prékopa-Leindler qui prédit que, si $\lambda \in]0, 1[$ et si f, g et h sont des fonctions boréliennes positives sur $\mathbb{R}^n$ telles que

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad h(\lambda x + (1 - \lambda y)) \geqslant f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda},$$

alors on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x \right)^\lambda \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,\mathrm{d}x \right)^{1-\lambda}.$$

On en déduit des propriétés intéressantes des lois log-concaves, qui impliquent des résultats de la géométrie convexe comme par exemple le théorème de Brunn-Minkowski. Divers variants de ces théorèms sont aussi à présenter.

Référence. — `https://terrytao.wordpress.com/tag/prekopa-leindler-inequality/`
F. Barthe, *Autour de l'inégalité de Brunn-Minkowski*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Mathématique, Tome XII, no.2 (2003), p.127-178.

Exposés 9-10. Entropie

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ dont la loi de probabilité admet une densité $p(.)$ par rapport à une mesure σ-finie μ. L'entropie de X par rapport à μ est définie comme

$$\mathbf{Ent}_\mu(X) := \mathbb{E}[\ln p(X)] = \int_E p(x) \ln p(x)\, \mu(\mathrm{d}x),$$

pouvu que la variable aléatoire $\ln p(X)$ est intégrable. La notion d'entropie est importante dans la théorie des probabilités et dans la statistique. Elle permet de décrire de façon numérique l'information contenu dans un modèle probabiliste.

Le but de ces exposés est de présenter diverses inégalités concernant l'entropie. En particulier, on présentera la démonstration de l'inégalité de Shannon-Stam, qui prédit que, si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, alors

$$\exp(2\mathbf{Ent}(X+Y)/d) \geqslant \exp(2\mathbf{Ent}(X)/d) + \exp(2\mathbf{Ent}(Y)/d),$$

où $\mathbf{Ent}(.)$ désigne la fonction d'entropie par rapport à la mesure de Lebesgue. L'orateur peut aussi aborder des liens entre l'inégalité de Shannon-Stam et l'inégalité de Brunn-Minkowski. L'inégalité de Sobolev logarithmique est un autre sujet naturel à traiter.

Enfin, l'orateur présentera les inégaltés de Brunn-Minkowski et de Shannon-Stam inversées, qui sont des résultats récents de Bobkov et Madiman.

Référence. — F. Barthe, *Autour de l'inégalité de Brunn-Minkowski*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Mathématique, Tome XII, no.2 (2003), p.127-178.
I. Gentil, *From the Prékopa-Leindler inequality to modified logarithmic Sobolev inequality*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Mathématique, Tome XVII, no.2 (2008), p.291-308.
S. Bobkov & M. Madiman, *Reverse Brunn-Minkowski and reverse entropy power inequalities for convex measures*, J. Funct. Anal. 262 (2012), no. 7, 3309-3339.

Exposés 11-12. Variétés toriques et géométrie convexe

En géométrie algébrique, les variétés toriques forment une famille de variétés algébriques dont la structure peut être décrite d'une façon combinatoire en faisant des liens avec la géométrie convexe. Ces liens peuvent être généralisés au cas des variétés projectives générales, grâce aux travaux récents d'Okounkov, Lazarsfeld-Mustaţă et Kaveh-Khovanskii. En particulier, les inégalités de la géométrie convexe sont utilisées à la géométrie algébrique ou à la géométrie arithmétique, pour obtenir des inégalités entre des invariants géométriques. Le but de ces exposés est d'introduire la notion des variétés toriques et les fibrés en droites sur ces variétés, ainsi que la description combinatoire de ces objets. L'orateur présentera alors l'analogue en géométrie algébrique des inégalités de la géométrie convexe, comme par exemple Brunn-Minkowski, isopérimétrique etc.

Référence. — `http://www-math.sp2mi.univ-poitiers.fr/~bosio/docs/coursvarietestoriques.pdf`
W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Annals of Mathematics Studies, 131. The William H. Roever Lectures in Geometry. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

---

20 décembre 2014

Huayi Chen, • *E-mail :* `huayi.chen@ujf-grenoble.fr`
Url : `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~huayi`