

Sujets de colle

Exercice 1 Soient z et w deux nombres complexes. Montrer que

$$||z| - |w|| \leq \min\{|z - w|, |z + w|\}$$

Exercice 2 Dans \mathbb{R}^4 , on considère les sous-espaces vectoriels $E_1 = \langle v_1, v_2 \rangle$ et $E_2 = \langle w_1, w_2 \rangle$ avec $v_1 = (1, -1, 0, 1)$ et $v_2 = (0, 2, 1, 0)$, $w_1 = (0, 6, -1, 4)$ et $w_2 = (3, 3, 1, 5)$.

- Donner une base de $E_1 \cap E_2$ et déterminer sa dimension.
- Donner une base de $E_1 + E_2$ et déterminer sa dimension.
- Déterminer un supplémentaire de $E_1 + E_2$ dans \mathbb{R}^4 .

Exercice 3 Soient E un espace vectoriel de rang fini sur \mathbb{R} , A une famille génératrice dans E .

- Montrer que, pour tout $b \in E$, l'ensemble $A \cup \{b\}$ est encore une famille génératrice de E .
- Montrer que, si pour tout $a \in A$, l'ensemble $A \setminus \{a\}$ n'est plus une famille génératrice de E , alors A est une base de E .

Exercice 4 Soient E un espace vectoriel de rang fini sur \mathbb{R} , A une famille libre non-vide dans E .

- Montrer que, pour tout $a \in A$, l'ensemble $A \setminus \{a\}$ est encore une famille libre dans E .
- Montrer que, si pour tout $b \in E$, l'ensemble $A \cup \{b\}$ n'est plus une famille libre dans E , alors A est une base de E .

Exercice 5 Soient A une matrice réelle de taille 3×4 , B la transposée de A . Est-ce que la matrice BA peut être inversible ?

Exercice 6 Soit A une matrice réelle de taille 3×3 qui est inversible. On suppose que $A^2 = A$. Déterminer le déterminant de A .

Exercice 7 Déterminer toutes les matrices réelle A de taille 2×2 telles que $A^2 = I$.

Exercice 8 Soit A une matrice réelle de taille 3×3 telle que $A^5 = 0$. Montrer que $I + A$ est inversible.