Université Paris 7 Denis Diderot
MT1 (Algèbre et analyse élémentaires)
Groupe 1D4, 2008-2009

Sujets de colle

Exercice 1 Soit f une fonction monotone sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Montrer que $f(x) = f(0) + f(1)x$.

Exercice 2 Soit f la fonction sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = \begin{cases} n^{-1}, & x = m/n \text{ avec } m \text{ et } n \text{ premiers entre eux,} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue en tout point dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et est discontinue en tout point dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 3 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(f(x)) = +\infty$. Montrer que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 4 Soit f la fonction sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$f(x) = a_1 \sin(x) + a_2 \sin(2x) + \cdots + a_n \sin(nx),$$

où $a_1, \cdots, a_n$ sont des nombres réels. On suppose que $|f(x)| \leqslant |\sin x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leqslant 1.$$

Exercice 5 Soit f une fonction deux fois dérivables sur $]0, +\infty[$. On suppose que M_0 et M_2 sont deux nombres réels tels que $\sup\limits_{x>0} |f(x)| \leqslant M_0$ et $\sup\limits_{x>0} |f''(x)| \leqslant M_2$. Montrer que

$$\forall\, x > 0, \quad |f'(x)| \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

Exercice 6 Soit $[a, b]$ un intervalle fermé, où $-\infty < a < b < +\infty$. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ qui est dérivable sur $]a, b[$. Montrer qu'il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

$$2\xi(f(b) - f(a)) = (b^2 - a^2) f'(\xi).$$

Exercice 7 Soit f une fonction continue définie sur un intervalle ouvert $]a, b[$, où $-\infty < a < b < +\infty$. On suppose que, pour tous x et y dans $]a, b[$, on ait

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Montrer que, pour tout $t \in]0,1[$ et tous x, y dans $]a,b[$, on a

$$f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y).$$

Le résultat est-il nécessairement vrai si on ne suppose plus que f soit continue ?