Université Paris 7 — Année 2008/2009
Géométrie Différentielle — Master 1

Partiel
Durée : ? heures
18 mai 2009

Les exercices sont indépendants. Les calculatrices, téléphones portables, lecteurs MP3 et documents (cours et TD par exemple) sont interdits. Une réponse ne vaut *que* si elle est démontrée par un argument explicite et correct. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.

Questions de cours

Mettre en contexte et définir les notions suivantes.

1. Point ombilic.
2. Point elliptique.
3. Dérivée covariante d'un champ de vecteurs le long d'une courbe.
4. Courbe géodésique.
5. Ligne de courbure.

Questions de cours

Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface différentielle connexe de classe C^∞ dont chaque point $p \in S$ est un ombilic. Démontrer que soit S est contenue dans un plan, soit S est contenue dans une sphère.

Questions de cours

Enoncer la version locale du théorème de Gauss-Bonnet.

Exercice 1

On considère le tore de révolution $S \subset \mathbb{R}^3$ obtenu par rotation autour de l'axe Oz du cercle d'équations $(x-a)^2 + z^2 = r^2$ et $y = 0$ $(a > r > 0)$. Sur S on considère les courbes Γ_1, Γ_2 et Γ_3 engendrées respectivement par la rotation des points $(a+r, 0)$, $(a-r, 0)$ et (a, r) du plan $y = 0$ (représenter ces courbes et le tore sur un dessin). Parmi ces trois courbes, lesquelles sont

1. une courbe géodésique ;
2. une ligne de courbure.

Justifier vos réponses.

TSVP ▶

Exercice 2
1) Soit $a > 0$ et $f, g : [-a, a] \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^∞ telles que $f(0) = g(0) = 0$, $f'(0) = g'(0) = 0$, et $0 \leq f \leq g$. Notons Γ_f (resp. Γ_g) le graphe de f (resp. de g), et κ_f (resp. κ_g) la courbure de Γ_f (resp. de Γ_g) en $(0,0)$. Comment les réels κ_f et κ_g se comparent-ils ? Démontrer.
2) Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface différentielle compacte de classe C^∞. On définit $E = \{r \in \mathbb{R} : S \subset B(0, r)\}$, puis $\rho = \inf E$. Montrer que $S \cap \partial B(0, \rho) \neq \emptyset$. Soit $p \in S \cap \partial B(0, \rho)$: en se référant à 1) démontrer que p est un point elliptique de S. (Indication : considérer des sections de S et de $\partial B(0, \rho)$ par des plans orthogonaux au plan tangent en p).
3) On suppose en outre que S est connexe et n'est pas homéomorphe à une sphère. Démontrer que S contient au moins un point où $K < 0$, au moins un point où $K = 0$, et au moins un point où $K > 0$. (Indication : utiliser le théorème de Gauss-Bonnet).

Exercice 3 On dit qu'une surface compacte régulière Σ de classe C^1 est *convexe* si, pour tout point $p \in \Sigma$, l'intersection de Σ et $T_p\Sigma$ est $\{p\}$, où $T_p\Sigma$ désigne l'espace tangent de Σ en p. On rappelle que, si localement en p la surface est définie par l'équation $f(x) = 0$, alors $x \in T_p\Sigma$ si et seulement si $D_pf(x - p) = 0$.

1. On désigne par $S^2 := \{p \in \mathbb{R}^3 \, : \, \|p\| = 1\}$ la sphère unité dans $\mathbb{R}^3$. Montrer que, si p et q sont deux point distinct dans S^2, alors $\langle p, q\rangle < 1$. En déduire que S^2 est une surface convexe.
2. Le but de cet exercice est d'établir un lien entre la convexité d'une surface et la positivité de sa courbure de Gauß.
   (1) Soient Σ une surface régulière de classe C^2 et p un point de Σ tel que $T_p\Sigma \cap \Sigma = \{p\}$. On suppose que Σ est localement définie par l'équation $f(x) = 0$ avec $D_pf \neq 0$.
      (a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que la signe de f est constante sur $(T_p\Sigma \setminus \{p\}) \cap B(p, \varepsilon)$, où $B(p, \varepsilon) = \{q \in \mathbb{R}^3 \, : \, \|q - p\| < \varepsilon\}$.
      (b) En utilisant le développement de Taylor à l'ordre 2 de la fonction f en p, montrer que la deuxième forme fondamentale b_p est ou bien semi-positive ou bien semi-négative.
      (c) En déduire $K(p) \geqslant 0$.
   (2) Soit Σ une surface régulière connexe compacte de classe C^2. On suppose que, pour tout $p \in \Sigma$, la coubure de Gauß $K(p)$ soit strictement positive.
      (a) Montrer que, pour tout $p \in \Sigma$, il existe un unique vector N_p de norme 1 orthogonal à $T_p\Sigma$ et qui vérifie la condition suivante : il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in \Sigma$ avec $\|x - p\| < \varepsilon$, on ait $\langle N_p, x - p\rangle < 0$.
      (b) Montrer que l'application $N : \Sigma \to S^2$ qui envoie p en N_p est de classe C^1 et de rang 2 partout.
      (c) En déduire que N est un homeomorphisme et Σ est une surface convexe.
3. Soit Σ une surface non-vide dans $\mathbb{R}^3$ définie par l'équation $f(x, y, z) = 0$, où f est une fonction de classe C^2 définie sur un ouvert non-vide U de $\mathbb{R}^3$ avec

$D_pf \neq 0$ quel que soit $p \in U$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \Sigma$, soit A_λ la matrice suivante :

$$A_\lambda := \begin{pmatrix} D_p^2 f - \lambda I & D_p f \\ (D_p f)^T & 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de A_λ est un polynôme de degré 2 que l'on notera $Q_p(\lambda) = a(p) + b(p)\lambda + c(p)\lambda^2$.

1) Montrer que, si λ est une racine de Q_p, alors il existe un vecteur non-nul $u \in \mathrm{Ker}(D_pf)$ tel que $D_p^2 f(u) - \lambda u$ soit une proportion de D_pf.
2) Montrer que la courbure de Gauß de Σ en p est

$$K(p) = \frac{a(p)}{c(p) \cdot \|D_p f\|}.$$

3) Montrer que la courbure moyenne de Σ en p est

$$H(p) = -\frac{b(p)}{2c(p) \cdot \|D_p f\|}.$$

4) Application : déterminer si les surfaces suivantes sont convexes.
   (a) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 10$;
   (b) $(3 - \sqrt{x^2 + y^2} + z^2)^2 = 1$.