

Feuille d'exercices 1

Exercice 1 Exprimer les énoncés suivants en français et déterminer s'ils sont vrais ou faux.

- a) $\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad y \geq x$,
- b) $\exists x \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{N} \quad y \geq x$,
- c) $\exists x \in \mathbb{Z} \quad \forall y \in \mathbb{Z} \quad y \geq x$.

Exercice 2 Interpréter les phrases suivantes en formule mathématique, déterminer si elles sont vraies ou fausses, puis déterminer leurs négations, en formule et en français (On convient que le symbole de négation ne figure pas devant les quantificateurs).

- a) Il existe deux nombres réels différents qui ont la même valeur absolue.
- b) Tout nombre pair est divisible par 4.
- c) Le plus petit entier n'existe pas.
- d) Tout nombre réel est encadré par deux entiers.

Exercice 3 Interpréter la phrase "*tout entier n divisible par 6 est pair*" en formule mathématique. En choisissant des valeurs convenables de n , expliquer pourquoi un énoncé de la forme "faux implique vrai" ou "faux implique faux" porte comme valeur de vérité vraie.

Exercice 4 Montrer les assertions suivantes :

- (1) $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \quad (n \geq 1)$,
- (2) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad (n \geq 1)$,
- (3) $|\sin nx| \leq n|\sin x| \quad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$,
- (4) $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad (x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$.

Exercice 5 Montrer que, si l'assertion

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right)^2$$

est vraie pour $n = k$, alors il en est de même pour $n = k + 1$. Expliquer pourquoi elle est fausse.

Exercice 6 Soit $(x_i)_{i=1}^n$ une famille de nombres réels. En utilisant la méthode de récurrence, montrer la formule suivante :

$$\prod_{i=1}^n (1 - x_i) = 1 - \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{\#I-1} \prod_{i \in I} x_i.$$