

## Feuille d'exercices 10

**Exercice 1** Soit  $\Gamma$  la courbe paramétrée par

$$x(t) = t^2 + \frac{2}{t} + 1, \quad y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2}.$$

- 1) Quel est l'ensemble de définition de ces deux fonctions ? Calculer leurs dérivées.
- 2) Dresser le tableau de variation.
- 3) Quelles sont les droites asymptotes et les directions asymptotiques de  $\Gamma$  ? Quelle est la position de la courbe par rapport aux asymptotes éventuelles ?
- 4) Déterminer les points stationnaires (=singuliers) de  $\Gamma$ , préciser les tangentes à la courbe et la position de  $\Gamma$  par rapport aux tangentes en ces points. Un dessin local en ce(s) point(s) sera apprécié.
- 5) Chercher tous les couples  $(t, \theta)$  de nombres réels distincts avec  $t < \theta$  tels que  $x(t) = x(\theta)$  et  $y(t) = y(\theta)$ . Quels sont les points doubles de la courbe (c'est-à-dire les points où deux branches de la courbe se croisent) ? Donner les équations des différentes tangentes en ces points.
- 6) Dessiner sommairement la courbe  $\Gamma$  (en y faisant figurer les résultats de toutes les questions précédentes).

**Exercice 2** On considère la courbe paramétrée  $\Gamma$  suivante :

$$x(t) = t(t + 2), \quad y(t) = \frac{t^3}{3t + 2}.$$

- 1) Quel est l'ensemble de définition des fonctions  $x(t)$  et  $y(t)$ . Déterminer leurs dérivées.
- 2) Dresser le tableau de variations des fonctions  $x(t)$  et  $y(t)$ .
- 3) Quelles sont les asymptotes à la courbe  $\Gamma$  ? Étudier les directions asymptotiques.
- 4) Calculer les développements limités à l'ordre 4 en  $t = -1$  des fonctions  $x(t)$  et  $y(t)$ .
- 5) Déterminer les points stationnaires de la courbe  $\Gamma$  et préciser leur nature. Dessiner l'allure locale de la courbe en ces points.
- 6) Tracer la courbe  $\Gamma$  en y faisant apparaître les éléments déterminés aux questions précédentes.