Université Paris 7 Denis Diderot
MT1 (Algèbre et analyse élémentaires)
Groupe 1D4, 2008-2009

Feuille d'exercices 3

Exercice 1 Calculer le module et l'argument des nombres complexe $1-i$ et $1+\sqrt{3}i$, puis mettre le nombre $\dfrac{(1+\sqrt{3}i)^{11}}{(1-i)^{20}}$ sous forme cartésienne.

Exercice 2 Soient les nombres complexes $z = 1+\sqrt{3}i$ et $w = 2+2i$. Mettre sous forme polaire les nombres : z, w, z/w et zw. En utilisant les résultats obtenus, calculer explicitement les valeurs suivantes : $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$, $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.

Exercice 3 Soient z_1 et z_2 des nombres complexes. Montrer les égalités suivantes :
1) $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2) + |z_2|^2$,
2) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$.

Exercice 4 Représenter dans le plan complexe l'ensemble des points z vérifiant

1) $\lvert z-1\rvert = 1$;	2) $\lvert z+i-3\rvert \leqslant 2$;	3) $\lvert z-i\rvert = \lvert z+1\rvert$;
4) $z+\overline{z} = z\overline{z}$;	5) $z + 4/z \in \mathbb{R}$;	6) $\lvert z\rvert = \lvert 1/z\rvert = \lvert z-1\rvert$.

Exercice 5 Soient α et β deux nombres complexes tels que les racines de l'équation

$$x^2 + \alpha x + \beta = 0$$

sont réelles. Montrer que α et β sont deux nombres réels.

Exercice 6 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit $z \in \mathbb{C}^*$ vérifiant $z + z^{-1} = 2\cos\alpha$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $z^n + z^{-n} = 2\cos(n\alpha)$.

Exercice 7 On se donne un nombre réel x.
1) Calculer $\cos(5x)$ et $\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$. En utilisant le fait que $\cos(5\pi/10) = 0$, donner la valeur de $\cos(\pi/10)$.
2) Soit z un nombre complexe non-nul. On note $u := z + z^{-1}$.
   (i) Montrer que $u^2 + u - 1 = 0$ si et seulement si $z \neq 1$ et $z^5 = 1$;
   (ii) En déduire que $\cos(2\pi/5) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\cos(\pi/5) = (\sqrt{5}+1)/4$.
   (iii) En utilisant la formule pour $\cos(2x)$ établie dans la question 1), retrouver la valeur de $\cos(\pi/10)$.

Exercice 8 Soit $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ l'application telle que $f(z) = z^2/(1-z)$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.
1) Déterminer les sous-ensembles $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{-4\})$ et $f^{-1}(\{3i\})$.

2) Soit $u \in \mathbb{C}$. Combien l'ensemble $f^{-1}(\{u\})$ a-t-il d'élément ?

3) L'application f est-elle injective ? Est-elle surjective ?

Exercice 9 Soient $(\alpha, \theta) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Mettre sous forme polaire les nombres $1+e^{i\theta}$ et $(1+e^{i\theta})^n$. En déduire les valeurs de

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{i(\alpha+k\theta)} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(\alpha+k\theta).$$

Exercice 10 Soit $z \neq 1$ un nombre complexe.

1) Montrer que pour tout entier naturel n, on a

$$1 + z + \cdots + z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z}.$$

2) En déduire les valeurs de

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$$

pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 11 Soient z et w deux nombres complexes. Montrer que

$$\big||z| - |w|\big| \leqslant \min\{|z-w|, |z+w|\}$$