Université Paris 7 Denis Diderot
MT1 (Algèbre et analyse élémentaires)
Groupe 1D4, 2008-2009

Feuille d'exercices 4

Exercice 1 Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^2$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \;\text{ et }\; 2x - y = 0\}$

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y + 1 = 0\}$.

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 3y \leq 4\}$.

Exercice 2 Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les vecteurs $v = (1, 2)$ et $w = (-2, m)$, où $m \in \mathbb{R}$.

a) Sous quelle condition sur le paramètre m le vecteur w est-il multiple du vecteur v ?

b) En supposant que w *n'est pas* multiple de v, montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ est une combinaison linéaire de v et w.

Exercice 3 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $v = (1, -2, -5)$ et $w = (-2, 4, m)$, où $m \in \mathbb{R}$.

a) quelle condition sur le paramètre m le vecteur w est-il multiple du vecteur v ?

b) On suppose que w *n'est pas* multiple de v et on considère l'ensemble P de toutes les combinaisons linéaires de v et w. Montrer qu'on a

$$P = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0 \,\},$$

où a, b, c sont des nombres réels, non tous les trois nuls, que l'on déterminera.

Exercice 4 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $v_1 = (-2, 4, 1)$, $v_2 = (1, -2, 0)$, et $v_3 = (3, b, -1)$, où $b \in \mathbb{R}$.

a) Sous quelle condition sur le paramètre b le vecteur v_3 est-il une combinaison linéaire de v_1 et v_2 ?

b) On suppose cette condition véifiée. Montrer que v_1 est une combinaison linéaire de v_2 et v_3 et que v_2 est une combinaison linéaire de v_1 et v_3.

c) On suppose que cette condition n'est pas vérifiée. Montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est une combinaison linéaire de v_1, v_2 et v_3.

Exercice 5 Dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants ? Forment-ils une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$?

a) $u = (3, 2, 1)$ et $v = (4, 2, 0)$;

b) $u = (3, 1, 2)$, $v = (5, 1, 0)$ et $w = (1, 1, 4)$;

c) $u = (-2, 4, 1)$, $v = (1, -2, 0)$ et $w = (3, m, -1)$ (discuter suivant les valeurs de m).

Exercice 6 Montrer que dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (2,3,-1)$ et $v_2 = (1,-1,-2)$ engendrent le même sous-espace vectoriel que $w_1 = (3,7,0)$ et $w_2 = (5,0,-7)$.

Exercice 7 Les familles suivantes sont elles des bases de $\mathbb{R}^3$?

a) $\mathcal{A} = \big((1,3,2),(0,2,3),(0,0,1)\big)$;

b) $\mathcal{B} = \big((1,4,6),(0,3,2)\big)$.

Exercice 8 a) Prouver que $u_1 = (0,1,2)$, $u_2 = (1,3,5)$ et $u_3 = (5,4,6)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Calculer les coordonnées de $u = (7,4,7)$ dans cette base.

Exercice 9 Déterminer le rang de la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ formée de :
$u_1 = (1,0,2,2)$, $u_2 = (1,-1,3,-2)$, $u_3 = (2,-1,5,0)$.

Exercice 10 Déterminer une base et la dimension, des sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$:

a) $\langle a_1,a_2,a_3\rangle$ où $a_1 = (3,3,10)$, $a_2 = (0,3,4)$ et $a_3 = (1,0,2)$; $b_2 = (0,1,1)$;

b) $\{(2t+u,-u,-2t) \mid t,u \in \mathbb{R}\}$;

c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z = 0 \text{ et } 3x-y+z = 0\}$.

Exercice 11 Déterminer des équations cartésiennes pour chacun des sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$.

a) $A = \{(3\alpha+2\beta,\beta+2\alpha,\alpha-\beta)\ ;\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$;

b) $B = \langle b\rangle$ où $b = (3,2,1)$.

Exercice 12 Dans $\mathbb{R}^4$ on considère $a_1 = (2,-2,3,1)$ et $a_2 = (-1,4,-6,-2)$.

a) Trouver des vecteurs a_3 et a_4 tels que (a_1,a_2,a_3,a_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.

b) Déterminer un système d'équations pour le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par a_1 et a_2.

Exercice 13 Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des (x,y,z,t) tels que $x+y+z+t = 0$ et l'ensemble F des (x,y,z,t) tels que $x = y = z = t$.

a) Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

b) Déterminer des bases de E et de F.

Exercice 14 Soient E_1 le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\{(1,3,0,4),(2,0,1,2)\}$ et E_2 le sous-espace vectoriel engendré par $\{(1,1,2,3),(4,-1,0,2)\}$.

Les sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Exercice 15 Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels $E_1 = \langle v_1,v_2\rangle$ et $E_2 = \langle w_1,w_2\rangle$ avec $v_1 = (1,-1,0,1)$ et $v_2 = (0,2,1,0)$, $w_1 = (0,6,-1,4)$ et $w_2 = (3,3,1,5)$.

a) Donner une base de $E_1 \cap E_2$ et déterminer sa dimension.

b) Donner une base de $E_1 + E_2$ et déterminer sa dimension.

c) Déterminer un supplémentaire de $E_1 + E_2$ dans $\mathbb{R}^4$.