Université Paris 7 Denis Diderot
MT1 (Algèbre et analyse élémentaires)
Groupe 1D4, 2008-2009

Feuille d'exercices 5

Exercice 1 Résoudre les systèmes d'équations suivants :

a) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+3z=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+y+2z=2 \\ x-4y+7z=3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y+3z+2t=-2 \\ 2x+3y+4z+t=-1 \\ 3x+7y+z-6t=6 \end{cases}$

Exercice 2 Résoudre en utilisant la méthode du pivot de Gausse :

a) $\begin{cases} x-3y-2z=-1 \\ 2x+y-4z=3 \\ x+4y-2z=4 \\ 5x+6y-10z=10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y+3z-2t=6 \\ 2x-y-2z-3t=8 \\ 3x+2y-z+2t=4 \\ 2x-3y+2z+t=-8 \end{cases}$

Exercice 3 Résoudre et discuter les système suivants d'inconnues x, y et z :

a) $\begin{cases} x+2y-z=a_1 \\ -2x-3y+3z=a_2 \\ x+y-2z=a_3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \lambda x+y+z=a^2 \\ x+\lambda y+z=a \\ x+y+\lambda z=1 \end{cases}$

Exercice 4 Écrire des système d'équations linéaires dont les solution sont les ensembles suivants, où u et v parcourent $\mathbb{R}$

a) $\begin{cases} x=u+v-2 \\ y=-u+2v+1 \\ z=u-v \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=u+2v-3 \\ y=-u+v-2 \\ z=2u+2v-1 \\ t=-u-v+3 \end{cases}$

Exercice 5 Soit le système

$$(S)\begin{cases} x+3y+4z=0 & (L_1) \\ 3x+2y+4z=0 & (L_2) \\ x+2y+3z=0 & (L_3) \end{cases}$$

On remplace L_1 par $L'_1 = L_2 - L_1$, L_2 par $L'_2 = L_2 - L_3$ et L_3 par $L'_3 = L_1 - L_3$. Le système (S) est-il équivalent au système $(S')\begin{cases} (L'_1) \\ (L'_2) \\ (L'_3) \end{cases}$

Exercice 6 Effectuer tous les produits possibles de deux matrices choisies parmi les quatre

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 8 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 3 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 8 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 7 Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathfrak{M}(2,\mathbb{R})$, les parties suivantes sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

1) l'ensemble I des matrices inversibles ;
2) l'ensemble F des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$ où a et b parcourent $\mathbb{R}$;
3) l'ensemble G des matrice qui commutent avec une matrice A fixée.

Exercice 8 On se donne une droite D et un point A dans $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe une unique droite D' passant par A et parallèle à D.

Exercice 9 1) On se donne deux points distinct $A = (a,b)$ et $B = (c,d)$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique droite D passant par A et B. Déterminer l'équation qui définit la droite D.

2) Montrer que trois points $A_i = (a_i, b_i)$ $(i = 1,2,3)$ de $\mathbb{R}^2$ sont alignés si et seulement si $a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_1 = b_1a_2 + b_2a_3 + b_3a_1$.
3) Soient A, B, C et D quatres points dans $\mathbb{R}^2$ parmi lesquels trois points quelconques sont non-alignés. Montrer que $(AB) \parallel (CD)$ et $(AC) \parallel (BD)$ si et seulement si $[A,D]$ et $[B,C]$ ont même milieu.

Exercice 10 1) Soient $A = (1,0,2)$, $B = (-1,4,2)$ et $C = (3,-2,1)$ dans $\mathbb{R}^3$. Montrer que A, B, C ne sont pas alignés et déteminier l'équation du plan (ABC).

2) Les points $(1,1,0)$, $(2,0,1)$, $(1,2,0)$ et $(-1,4,2)$ de $\mathbb{R}^3$ sont-ils coplanaires ?
3) Soit D la droite de $\mathbb{R}^3$ d'équation $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - z = 2 \end{cases}$. Montrer qu'il existe un unique plan P de $\mathbb{R}^3$ passant par $A = (1,0,0)$ et contenant D. Déterminer l'équation cartésienne qui caractérise P.

Exercice 11 On considère $\mathbb{C}$ comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que $e_1 = 1$ et $e_2 = i$ forment une base de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$. En déduire la dimension de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$.
2) Soit $z = x + iy$ un nombre complexe, où x et y sont des nombres réels. On désigne par $R_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tel que $R_z(w) = zw$. Montrer que R_z est une application $\mathbb{R}$-linéaire. Déterminer la matrice A_z de R_z relativement à la base $\{e_1, e_2\}$.
3) Déterminer le rang de la matrice A_z selon la valeur de z.
4) Soit $c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application qui envoie z vers $\overline{z}$. Montrer que c est une application linéaire. Déterminer sa matrice M_c relativement à la base $\{e_1, e_2\}$.
5) Montrer que $A_zM_c = M_cA_{\overline{z}}$.