Université Paris 7 Denis Diderot
MT1 (Algèbre et analyse élémentaires)
Groupe 1D4, 2008-2009

Feuille d'exercices 6

Exercice 1 Montrer, en utilisant seulement la définition de la limite, que la suite $n/(n+2)$ tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 Étudier les convergences des suites suivantes ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$). Dans le cas où la suite est convergente, déterminer sa limite.

$$1)\ \frac{2n^2+1}{n^2+3n+1} \qquad 2)\ \frac{1}{n}+(-1)^n \qquad 3)\ \frac{2^n-3^n}{2^n+3^n}$$

$$4)\ \frac{n}{2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \qquad 5)\ \frac{2-(-1)^n}{n+\cos n} \qquad 6)\ \frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}$$

Exercice 3 Déterminer les limites des suites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1+a+\cdots+a^{n-1}}$ $(a>0)$;

2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$;

3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}$ $(0<a<1)$;

4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n}$ $(a>1, k>0)$.

Exercice 4 Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres complexes qui converge vers $a \in \mathbb{C}$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|$.

Exercice 5 Soient $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites convergentes de limites a et b respectivement. Montrer que

1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \max(x_n, y_n) = \max(a,b)$;

2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \min(x_n, y_n) = \min(a,b)$.

Exercice 6 Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie récurrsivement par $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 1 + 1/x_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$.

Exercice 7 Déterminer la limite de la suite

$$\sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\ \cdots.$$

Exercice 8 Soient a_1 et b_1 deux nombres réels tels que $0 < a_1 < b_1$. Soient $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites définies récurssivement par

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n}, \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad n \geqslant 1.$$

Montrer que les deux suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ convergent vers la même limite.

Exercice 9 Soit $n \geqslant 1$ un entier. Montre que

1) $\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$;
2) $\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$;
3) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 4$;
4) $\frac{1}{n+1} < \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$.

Exercice 10 Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n.$$

Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge dans $\mathbb{R}$. En déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \log 2.$$

Exercice 11 Soient $A > 0$ et $x_1 \in]0, 1/A[$. Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie récurssivement par $x_{n+1} = x_n(2 - Ax_n)$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 12 Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite décroissante et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Soit

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

1) Montrer que la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
2) Montrer que $b_{2n} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ quel que soit $n \geqslant 1$.
3) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$.

Exercice 13 Soient $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite qui converge vers $a \in \mathbb{R}$ et $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $y_n = x_{\phi(n)}$. Montrer que la suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ converge aussi vers a.