

Feuille d'exercices 8

Exercice 1 On considère la fonction suivante sur \mathbb{R} :

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

La fonction f est-elle continue ? est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 2 On considère la fonction suivante sur \mathbb{R} :

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Montrer que la fonction g est dérivable sur \mathbb{R} et déterminer g' . La fonction $g'(x)$ a-t-elle de limite lorsque $x \rightarrow 0$?

Exercice 3 Calculer la dérivée d'ordre 1 des fonctions suivantes :

- 1) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$, ($x > 0$),
- 2) $\ln \ln x$, ($x > 1$),
- 3) $\ln \tan(x/2)$, ($0 < x < \pi$),
- 4) $\cos(\cos \sqrt{x})$, ($x > 0$).

Exercice 4 Soit f une fonction paire qui est dérivable en 0, montrer que $f'(0) = 0$.

Exercice 5 Soit f une fonction sur un intervalle ouvert I contenant 0. On suppose que f est dérivable en 0 et que $f(0) = 0$. On note, pour tout entier $n \geq 1$

$$x_n = f\left(\frac{1}{n^2}\right) + f\left(\frac{2}{n^2}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n^2}\right).$$

Déterminer la limite de $(x_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 6 Déterminer les limites suivantes :

- 1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sin \frac{1}{n^2} + \sin \frac{2}{n^2} + \cdots + \sin \frac{n}{n^2} \right]$,
- 2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \left(1 + \frac{2}{n^2} \right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2} \right)$.

Exercice 7 Calculer la dérivée d'ordre 1 des fonctions suivantes :

- 1) $\arcsin \sqrt{1 - x^2}$, ($0 < x < 1$),
- 2) $\ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}})$, ($x \in \mathbb{R}$),
- 3) $\arctan(\tan(x)^2)$, ($-\pi/2 < x < \pi/2$),
- 4) $e^{\sqrt{x}}$, ($x > 0$).

Exercice 8 Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} qui est dérivable en x_0 . Soient $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ et $(\beta_n)_{n \geq 1}$ deux suites strictement positives qui convergent vers 0. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_0 + \alpha_n) - f(x_0 - \beta_n)}{\alpha_n + \beta_n} = f'(x_0).$$

Exercice 9 Soient m et n deux entiers strictement positifs. Soit $f(x) = x^m(1-x)^n$ ($x \in [0, 1]$). Montrer qu'il existe $\xi \in (0, 1)$ tel que $m/n = \xi/(1-\xi)$.

Exercice 10 Soient a_0, a_1, \dots, a_n des nombres réels tels que

$$\frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \dots + a_n = 0.$$

Montrer que l'équation $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ admet au moins une racine sur $]0, 1[$.

Exercice 11 Soit f une fonction dérivable sur $]a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A,$$

où $A \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $\xi \in]a, +\infty[$ tel que $f'(\xi) = 0$.

Exercice 12 Montrer les assertions suivantes :

- 1) $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$,
- 2) $|\arctan(b) - \arctan(a)| \leq |b - a|$.

Exercice 13 1) Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\cos \alpha = \alpha$. Prouver que $\alpha \in]0, 1[$.

2) Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \cos(u_n)$. Montrer que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \sin(1)|u_n - \alpha|$. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers α .

Exercice 14 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a, b[$ ($a < b$). On suppose que $f'(x)$ est une fonction monotone. Montrer que $f'(x)$ est continue sur $]a, b[$.

Exercice 15 Soit f une fonction sur $[a, b]$ ($a < b$), qui est dérivable sur $]a, b[$. On suppose que f admet une dérivée à droite en a et une dérivée à gauche en b . On suppose de plus que $f'(a) < f'(b)$. Alors pour tout $\eta \in]f'(a), f'(b)[$, il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $f'(\xi) = \eta$.

Exercice 16 Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ qui est dérivable sur $]a, b[$ ($0 < a < b$). Montrer qu'il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = \xi(\ln b - \ln a)f'(\xi).$$