Université Paris 7 Denis Diderot
MT1 (Algèbre et analyse élémentaires)
Groupe 1D4, 2008-2009

Feuille d'exercices 9

Exercice 1 Calculer $\lim_{x\to+\infty}(x - \ln(\operatorname{ch} x))$.

Exercice 2 Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Exercice 3 Écrire la formule de Taylor pour la fonction exponentielle à l'ordre n en 0. En déduire que

$$\left| e - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \cdots - \frac{1}{n!} \right| < \frac{e}{(n+1)!}.$$

Exercice 4 Montrer que pour tout réel $x > 0$,

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} < \ln(n+1) - \ln(x) < \frac{1}{x} - \frac{1}{2(x+1)^2}.$$

En déduire la limite de $(1 + x^{-1})^x$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 5 Effectuer les développements limité suivants :

1) $x/\sin x$ à l'ordre 5 en 0,
2) $\sin(x + x^3)$ à l'ordre 5 en 0,
3) $\ln(\sin x/x)$ à l'ordre 4 en 0,
4) $\exp\left(\frac{4+3x}{2+x}\right)$ à l'ordre 4 en 0,
5) $\sin x/\sqrt{x}$ à l'ordre 2 en $\pi/4$,
6) $\arcsin(x)$ à l'ordre 5 en 0,
7) $e^{\sqrt{\cos x}}$ à l'ordre 5 en 0,
8) $\dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ à l'ordre 5 en 0

Exercice 6 Déterminer les nombres réels a et b tels que la fonction $f(x) = \cos(x) - (1 + ax^2)/(1 + bx^2)$ ait pour développement limité nul à l'ordre 5 en 0.

Exercice 7 Déterminer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos(x)}{x^4}$
2) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3x-2} - \sqrt[4]{x}}{1 - \sqrt[3]{x^2}}$
3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right)^{\frac{1}{x}}$
4) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{(x-1)^2}$
5) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x) + \operatorname{sh}(x)^2/2}{\sin(x)^4}$
6) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\tan(x) - sh(2x)}{(1 - \cos(3x))\arctan(x)}$

Exercice 8 Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant 0. On suppose que la fonction f est deux fois dérivable sur I, et que

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}\right)=0.$$

1) Déterminer $f(0)$, $f'(0)$ et $f''(0)$.

2) Déterminer $\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{x^2}+\frac{f(x)}{x^2}\right)$.

Exercice 9 Déterminer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/4}\frac{\arctan(x)-1}{x-\frac{\pi}{4}}$ 2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x)-x}{\sin(x)-x}$ 3) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}(\sin(x)-\tan(x))\ln(x)$

4) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}(\tan x)^x$ 5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ 6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{1+x^2}-\cos x\right)$

7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-2\cos x+\cos 2x}{x^2}$ 8) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\ln(1+x))-\ln(1+\sin x)}{(\cos(x)^2-1)}$ 9) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x/2)+\cos(x)}{1+\sin(x)^2+\cos(x)}$

Exercice 10 Soit $f(x)$ une fonction deux fois dérivable sur $[a,b]$. On suppose que $f''(x)$ est continue sur $[a,b]$ et que $f(a)=f(b)=0$. Montrer les assertions suivantes :

1) $\displaystyle\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant\frac{1}{8}(b-a)^2\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|$;

2) $\displaystyle\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|\leqslant\frac{1}{2}(b-a)\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|$.

Exercice 11 Soit f la fonction sur $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Montrer que f est une fonction lisse, et déterminer le développement limité de la fonction f à l'ordre arbitraire en 0.