Université Paris 7 Année 2008/2009
Géométrie Différentielle Master 1

Partiel
Durée : 2 heures
13 mars 2009

Les exercices sont indépendants. Les calculatrices, téléphones portables, lecteurs MP3 et documents (cours et TD par exemple) sont interdits. Une réponse ne vaut *que* si elle est démontrée par un argument explicite et correct. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.

Questions de cours

Donner la définition de surface différentielle $S \subset \mathbb{R}^3$.

Questions de cours

Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface différentielle orientée de classe C^2, $N : S \to S^2$ son application de Gauss, et $p \in S$. Démontrer que $dN(p) : T_pS \to T_pS$ est auto-adjointe.

Exercice 1 Soit U un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.

(1) Montrer que $\Sigma = \{(x, y, z) \mid z = f(x, y)\}$ est une surface régulière.

(2) Exprimer les coefficients de la première forme fondamentale en fonction de f et de ses dérivées.

(3) Déterminer l'aire de la surface Σ.

(4) Application : Calculer l'aire du paraboloïde

$$\{(x, y, x^2 + y^2) \mid x^2 + y^2 < 1\}.$$

Exercice 2 Dans cet exercice, on calcule le *nombre de rotation* d'une courbe plane fermée. Si $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ est une courbe paramétrée régulière (i.e. $\gamma'(t)$ est partout non-nul) dans $\mathbb{R}^2$, alors $T(t)$ et $N(t)$ désigne respectivement le vecteur tangent unitaire et le vecteur normal unitaire en $\gamma(t)$. On convient que

$$N(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} T(t).$$

On rappelle que la *courbure* $\kappa(t)$ de γ en point $\gamma(t)$ est définie par la formule

$$T'(t) = \kappa(t)\|\gamma'(t)\|N(t).$$

On désigne par S^1 le cercle unitié dans $\mathbb{R}^2$. Autrement dit,

$$S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

TSVP ▶

La question (1) est indépendante des autres.

(1) Soient $n \geqslant 1$ un entier et $I_n = [0, 2n\pi[$. Soit $\gamma_n : I_n \to \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée définie par $\gamma_n(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix}$, où $r > 0$ est une constante. Déterminer une abscisse curviligne s de γ_n. Déterminer la courbure κ_n de la courbe paramétrée γ_n. Calculer la valeur de l'intégrale
$$\frac{1}{2\pi}\int_{I_n} \kappa_n(s)\,\mathrm{d}s.$$

Soit $\pi : \mathbb{R} \to S^1$ l'application qui envoie θ en $(\cos\theta, \sin\theta)$. On admet le résultat suivant dont on ne demande pas la démonstration :

Pour tout intervalle $[a, b[\subset \mathbb{R}$ et toute application $f : [a, b[\to S^1$ qui est de classe C^1, il existe une unique fonction $\widetilde{f} : [a, b[\to \mathbb{R}$ telle que $\pi\widetilde{f} = f$ et que $\widetilde{f}(a) \in [0, 2\pi[$. De plus, $\widetilde{f}$ est aussi de classe C^1.

Dans les questions suivantes, on fixe un intervalle $I := [a, b[\subset \mathbb{R}$, $a < b$, une courbe régulière $\gamma : [a, b[\to \mathbb{R}^2$ qui est de classe C^2. On suppose que $\gamma(a) = \lim_{t\to b} \gamma(t)$ et $\gamma'(a) = \lim_{t\to b} \gamma'(t)$.

(2) Soit $\widetilde{T} : [a, b[\to \mathbb{R}$ la fonction telle que $\widetilde{T}(a) \in [0, 2\pi[$ et que $\pi\widetilde{T} = T$. Montrer que $\widetilde{T}'(t) = \kappa(t)\|\gamma'(t)\|$.

(3) En déduire que
$$M := \frac{1}{2\pi}\int_I \kappa(s)\,\mathrm{d}s$$
est un entier, où s est un paramètre curviligne de γ.

(4) Monter que, si κ est partout non-nul, alors $|M|$ est égal au cardinal de $T^{-1}(\{v\})$, où $v \in S^1$ est arbitraire.