Université Paris 7 Denis Diderot
L3Math-Info (Algèbre et géométrie)
2009-2010

Feuille d'exercices I

Exercice 1 Soit G un ensemble non-vide muni d'une loi interne $(x, y) \mapsto xy$. On dit que G est un *monoïde* si les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) la loi interne est associative : pour tous x, y, z dans G, on a $(xy)z = x(yz)$,

(ii) il existe un élément dit *unité* $e \in G$ tel que

$$\forall\, x \in G, \quad ex = xe = x.$$

1) Montrer que, si G est un monoïde, alors l'élément unité de G est unique.
2) Donner un exemple de monoïde qui n'est pas un groupe.
3) Soit G un monoïde. On suppose que chaque élément de G possède une inverse à gauche. Autrement dit, pour tout $x \in G$, il existe $y \in G$ tel que $yx = e$. Montrer que G est un groupe.

Exercice 2 1) Montrer que $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ muni de la loi de multiplication est un groupe abélien.
2) Montrer que le cercle unité S^1 dans $\mathbb{C}$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}^\times$. Déterminer $\mathbb{C}^\times/S^1$.
3) Montrer que l'application $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est un homomorphism de $(\mathbb{R}, +)$ dans S^1. Déterminer son noyau.

Exercice 3 1) Trouver tous les sous-groupes du groupe additif $(\mathbb{Z}, +)$.
2) Montrer que tout sous-groupe de $(\mathbb{Q}, +)$ engendré par un nombre fini d'élément est monogène.
3) Donner un exemple de sous-groupe non-monogène de $(\mathbb{Q}, +)$ qui est différent de $\mathbb{Q}$.
4) Montrer que $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Q}_+^\times, \times)$ ne sont pas isomorphes, où $\mathbb{Q}_+^\times$ désigne l'ensemble des nombres rationnels positifs non-nuls.

Exercice 4 Soit G un groupe.
1) Pour tout $x \in G$, on désigne par $c_x : G \to G$ l'application qui envoie g en xgx^{-1}. Montrer que c_x est un automorphisme.
2) Montrer que l'application de G vers $\mathrm{Aut}(G)$ qui envoie x en c_x est un homomorphisme de groupes.
3) Soit Z le centre de G. Montrer que Z est un sous-groupe distingué de G.
4) Montrer que G/Z est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(G)$.

Exercice 5 Soient G un groupe.

1) Montrer que le sous-ensemble $D(G)$ de G des éléments de la forme $aba^{-1}b^{-1}$ est un sous-groupe distingué de G.
2) Montrer que $G/D(G)$ est un groupe abélien.
3) Soit H un groupe abélien. Montrer que tout homomorphisme de G vers H se factorise par $G/D(G)$.

Exercice 6 Soit G un groupe fini. On appelle *caractère linéaire* de G tout homomorphisme de G dans $\mathbb{C}^\times$.

1) Montrer que, si χ est un caractère linéaire de G, $\chi \not\equiv 1$, alors
$$\sum_{g\in G} \chi(g) = 0.$$
2) Montrer que, si χ_1 et χ_2 sont deux caractères linéaires distincts de G, alors
$$\sum_{g\in G} \overline{\chi_1(g)}\chi_2(g) = 0.$$

Exercice 7 Soit G un groupe abélien fini. On désigne par $\widehat{G}$ l'ensemble des caractères linéaires de G. Si φ et ψ sont deux fonctions sur G à valeurs complexes, on définit
$$\langle \varphi, \psi \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \overline{\varphi(g)}\psi(g).$$

1) Montrer que $\langle\, ,\, \rangle$ est un produit hermitien sur l'ensemble $\mathbb{C}^G$ des fonctions complexes sur G.
2) Montrer que tout fonction complexe sur G s'écrit comme une combinaison linéaire de caractères linéaires.
3) En déduire que $\widehat{G}$ est une base orthonormée de $\mathbb{C}^G$.
4) Déterminer le cardinale de $\widehat{G}$.
5) Déterminer la valeur
$$\sum_{\chi\in\widehat{G}} \chi(g),$$
où g est un élément arbitraire de G.

Exercice 8 Soit G un groupe abélien fini. On appelle l'*exposant* de G le plus petit entier strictement positif r tel que $a^r = e$ pour tout $a \in G$.

1) Montrer que, pour tout élément $a \in G$, l'ordre de a divise r.
2) Si a et b sont deux éléments dans G tel que l'ordre de a est premier à l'ordre de b. Détermier l'ordre de ab.
3) Soit x un élément de G dont l'ordre est égal à l'exposant de G. Montrer qu'il existe un sous-groupe K de G tel que G soit isomorphe à $K \times \langle x \rangle$.
4) Montrer que tout groupe abélien fini est un produit de groupes cycliques. Que peut-on dire de plus ?