Université Paris 7 Denis Diderot
L3Math-Info (Algèbre et géométrie)
2009-2010

Feuille d'exercices XI

On désigne par $M_n(\mathbb{C})$ l'espace des matices de taille $n \times n$ et à coefficients dans $\mathbb{C}$, considéré comme un esapce vectoriel de rang n^2 sur $\mathbb{C}$. Pour toute matrice $X = (x_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{C})$, on note $\|X\| = n \sup\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |x_{ij}|$.

Exercice 1 Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $M_n(\mathbb{C})$ et que $\|XY\| \leqslant \|X\| \cdot \|Y\|$ pour toutes matrices X et Y dans $M_n(\mathbb{C})$.

Exercice 2 Dans cet exercice, on considère les séries entières matricielles de la forme

$$f(X) = \sum_{p \geqslant 0} a_p X^p,$$

où $X^0 = I$ par convention.

1) Montrer que, si $X = (x_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une matrice dans $M_n(\mathbb{C})$, alors le coefficient d'indice (i,j) de la matrice X^p $(p \geqslant 2)$ est

$$\sum_{1 \leqslant k_1, \cdots, k_{p-1}} x_{ik_1} x_{k_1 k_2} \cdots x_{k_{p-1} j}.$$

2) En déduire, si $\rho > 0$ est tel que la série $f(X)$ converge absoluement pour tous les $X \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $\|X\| < \rho$, alors sa somme est une fonction analytique dans cet ouvert. On utilisera le fait que, si une série entière $\sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$ converge absoluement dans un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{C}^N$ de la forme $|z_i| < \rho_i$ $(i \in \{1, \cdots, N\})$, alors la somme est analytique dans ce domaine.

3) Application : Montrer que la série

$$\exp(X) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{k!} X^k$$

converge absoluement vers une application analytique de $M_n(\mathbb{C})$ vers lui même.

Exercice 3 Dans cet exercice, on étudie la fonction $\exp : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$.

1) Montrer que, si $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, alors

$$\exp(gXg^{-1}) = g \exp(X) g^{-1}.$$

2) Montrer que

$$\| \exp(X) \exp(Y) - \exp(X+Y) \| \leqslant 2(e^{\|X\|} - 1)(e^{\|Y\|} - 1)$$

3) En déduire que

$$\exp(X) \exp(Y) - \exp(X+Y) = O(\|X\| \cdot \|Y\|)$$

quand X et Y tendent vers 0.

4) Montrer que, si $XY = YX$, alors $\exp(X)\exp(Y) = \exp(X+Y)$.

Exercice 4 Pour toute matrice X dans $M_n(\mathbb{C})$, on désigne par $\gamma_X : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ l'application qui envoie t en $\exp(tX)$.

1) Montrer que γ_X est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ vers $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
2) Montrer que γ_X est une application analytique sur $\mathbb{R}$.
3) Montrer que $\gamma'(0) = X$.

Exercice 5 On appelle *sous-groupe à un paramètre* de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tout morphisme de groupe de $(\mathbb{R}, +)$ vers $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ qui est continu. Le but de cet exercice est de montrer que tout sous-groupe à un paramètre de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est nécessairement de la forme γ_X pour certain $X \in M_n(\mathbb{C})$. Dans la suite, on fixe un sous-groupe à un paramètre $\gamma : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

1) Montrer que, si ϕ est une fonction lisse et à support compact sur $\mathbb{R}$, alors il existe un élément $A_\phi \in M_n(\mathbb{C})$ tel que
$$\int \phi(t-s)\gamma(s)ds = \gamma(t)A_\phi \quad \text{quel que soit } t \in \mathbb{R}.$$
2) Montrer que, si $A \in M_n(\mathbb{C})$ est tel que $\|A - I\| < 1$, alors A est inversible.
3) En déduire qu'il existe une fonction ϕ lisse et à support compact sur $\mathbb{R}$ telle que A_ϕ soit inversible.
4) En déduire que γ est une application lisse.
5) Soit $X = \gamma'(0)$. Montrer que $\gamma'(t) = X\gamma(t)$.
6) En déduire que $\gamma = \gamma_X$.

Exercice 6 Dans cet exercice, on étudie la dérivée de la fonction exponentielle.

1) Pour tout entier $p \geq 1$ soit $f_p : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ l'application qui envoie X en X^p. Montrer que
$$\forall\, A \in M_n(\mathbb{C}), \quad D_A f_p(X) = \sum_{i+j=p-1} A^i X A^j.$$
2) En déduire que
$$\forall\, A \in M_n(\mathbb{C}), \quad D_A \exp(X) = \sum_{p,q \geqslant 0} \frac{A^p X A^q}{(p+q+1)!}.$$

Exercice 7 Dans cet exercice, on étudie la dérivée du déterminant.

1) Montrer que la fonction dét $: M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ est lisse.
2) Montrer que $D_I \text{dét}\,(X) = \mathrm{tr}(X)$.
3) Déterminer $D_A \text{dét}$ pour toute $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que c'est une forme $\mathbb{C}$-linéaire non-nul.