Université Paris 7 Denis Diderot
L3Math-Info (Algèbre et géométrie)
2009-2010

Feuille d'exercices XII

Soit K un corps. On appelle *algèbre de Lie* sur K toute K-algèbre $(A, +, [\,,\,], 0)$ (non-nécessairement commutatif ni associatif ni unifère) qui vérifie les deux conditions suivantes :

1) pour tous les $X, Y \in A$, on a $[X, Y] = -[Y, X]$,
2) pour tous les $X, Y, Z \in A$, on a $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

On appelle *sous-algèbre de Lie* de A toute partie B de A contenant 0 qui est stable par les lois de composition de A. Il s'avère que l'ensemble B muni des restrictions des lois de A est une algèbre de Lie sur K.

Exercice 1 Soit $(A, +, [\,,\,], 0)$ une algèbre de Lie sur un corps K de caractéristique $\neq 2$. Montrer que A est une algèbre commutatif si et seulement si sa loi de multiplication est nulle.

Exercice 2 Soit $(A, +, \cdot, 0)$ une K-algèbre associative (non-nécéssairement unifère). Pour tous les $X, Y \in A$, on note $[X, Y] := XY - YX$. Montrer que $(A, +, [\,,\,], 0)$ est une algèbre de Lie sur K (appelée l'algèbre de Lie associée à $(A, +, \cdot, 0)$).

Exercice 3 On désigne par $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ l'algèbre de Lie associée à la $\mathbb{C}$-algèbre associative $M_n(\mathbb{C})$ (dont la loi de multiplication est la multiplication des matrices). Soit $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ la partie de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ des matrices de trace nulle. Montrer que $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Est-ce que $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ est une sous-algèbre de $M_n(\mathbb{C})$?

Exercice 4 On considère la série entière

$$\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (X - I)^k \tag{1}$$

dans $M_n(\mathbb{C})$.

1) Montrer que la série entière (1) converge absoluement dans le domaine $\|X - I\| < 1$ et donc définit une fonction analytic (que l'on notera log) sur ce domaine.
2) Montrer que $\exp(\log(X)) = X$ pour $\|X - I\| < 1$.
3) Montrer que $\|\exp(X) - I\| \leq e^{\|X\|} - 1$. En déduire que $\log(\exp(X)) = X$ pour $\|X\| < \log 2$.
4) Montrer que exp est un homéomorphisme analytique de la boule $\|X\| < \log 2$ dans un voisinage ouvert de I dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 5 Pour tout $X \in M_n(\mathbb{C})$, soit $\gamma_X : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ l'application qui envoie t en $\exp(tX)$. On a montré dans la feuille XI que γ_X est un morphisme de groupes.

1) Soient X et Y des matrices dans $M_n(\mathbb{C})$. Établir les relations suivantes :

$$\gamma_{X+Y}(t) = \lim_{n \to +\infty} \left(\gamma_X\left(\frac{t}{n}\right) \gamma_Y\left(\frac{t}{n}\right) \right)^n,$$

$$\gamma_{[X,Y]}(t^2) = \lim_{n\to+\infty} \left(\gamma_X\Big(\frac{t}{n}\Big)\gamma_Y\Big(\frac{t}{n}\Big)\gamma_X\Big(-\frac{t}{n}\Big)\gamma_Y\Big(-\frac{t}{n}\Big)\right)^{n^2}.$$

2) Soit H un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Soit $\mathfrak{h}$ l'ensemble des $X \in M_n(\mathbb{C})$ tels que $\exp(tX) \in H$ quel que soit $t \in \mathbb{R}$.
   (i) Montrer que $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Lie (sur $\mathbb{R}$) de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.
   (ii) Montrer que $gXg^{-1} \in \mathfrak{h}$ quels que soient $g \in H$ et $X \in \mathfrak{h}$.
   (iii) Montrer que

$$\mathfrak{h} = \{\gamma'(0) \,|\, \gamma :]-1,1[\to H \text{ de classe } C^1,\ \gamma(0) = I\}.$$

Exercice 6 Soient H un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\mathfrak{h}$ son algèbre de Lie (i.e., l'ensemble des $X \in M_n(\mathbb{C})$ tels que $\exp(X) \in H$).

1) Soit H° la composante convexe de I dans H. Montrer que H° est un sous-groupe de H.
2) Montrer que l'image de $\mathfrak{h}$ par exp est contenue dans H°.
3) Montrer que, pour tout $r > 0$, l'image de la boule de rayon r dans $\mathfrak{h}$ par l'application $\mathfrak{h}$ est un voisinage ouvert de I dans H.
4) En déduire que H est localement connexe par arcs.
5) Montrer que H est engendré par $\exp(\mathfrak{h})$.

Exercice 7 Pour chacun des sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ suivants, détermier son algèbre de Lie. Lesquelles sont des algèbres de Lie sur $\mathbb{C}$?

1) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$.
2) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.
3) $\mathrm{O}_n := \{X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \,|\, X^T X = I\}$, $\mathrm{SO}_n := \mathrm{O}_n \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.
4) $\mathrm{U}_n := \{X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \,|\, X^* X = I\}$, $\mathrm{SU}_n := \mathrm{U}_n \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 8 Dans cet exercice, on étudie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ l'algèbre de Lie de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. On note

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que (H, X, Y) est une base de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.
2) Calculer $[H, X]$, $[H, Y]$ et $[X, Y]$.
3) Pour $k \in \mathbb{N}_*$, soit V_k l'espaces des polynômes homogènes à deux variables x, y et de degré k. Montrer que les opérateurs suivants sont des endomorphismes de V_k :

$$\theta(H) := x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}, \quad \theta(X) := x\frac{\partial}{\partial y}, \quad \theta(Y) := y\frac{\partial}{\partial x}.$$

4) En déduire un morphisme d'algèbres de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ vers l'algèbre de Lie associée à l'algèbre associative $\mathrm{End}(V_k)$.
5) Montrer que V_k est une représentation irréductible de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Autrement dit, le seul sous-espace non-nul de V_k invariant par l'action de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est V_k lui-même.