Université Paris 7 Denis Diderot
L3Math-Info (Algèbre et géométrie)
2009-2010

Feuille d'exercices II

Exercice 1 Soit G un groupe et H un sous-groupe distingué de G.

1) Montrer que, si G' est un sous-groupe de G contenant H, alors H est un sous-groupe distingué de G'.
2) Montrer que, si A est un sous-groupe (non-nécessairement distingué) de G, alors $A \cap H$ est un sous-groupe distingué de A.
3) Soit A un sous-groupe de G. Montrer que HA est un sous-groupe de G contenant H.
4) Soit A un sous-groupe de G. Montrer que HA/H est isomorphe à $A/A \cap H$.

Exercice 2 Soit G un groupe finie et H un sous-groupe d'indice $n \geqslant 2$. On dit qu'un sous-groupe H' de G est conjugué à H s'il existe $g \in G$ tel que $H' = gHg^{-1}$.

1) Montrer que H admet au plus n sous-groupe conjugués dans G.
2) En déduire que G ne peut pas être écrit comme la réunion des sous-groupes conjugués de H.

Exercice 3 Soit G un groupe. Pour tout sous-groupe H de G, on désigne par $N_G(H)$ l'ensemble des $g \in G$ tel que $gHg^{-1} = H$.

1) Montrer que $N_G(H)$ est un sous-groupe de G contenant H.
2) Montrer que H est un sous-groupe distingué de $N_G(H)$.
3) Montrer que $N_G(H)$ est le plus grand sous-groupe de G contenant H et dans lequel H est distingué.

Exercice 4 Soient G un groupe et Z son centre. Montrer que, si G/Z est cyclique, alors G est abélien.

Exercice 5 Soient k le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et n un entier, $n \geqslant 1$. On désigne par $\mathrm{GL}_n(k)$ le groupe des matrices inversibles de taille $n \times n$ à coefficients dans k. Montrer que les sous-ensembles suivants de $\mathrm{GL}_n(k)$ sont des sous-groupes.

1) $\mathrm{SL}_n(k) := \{A \in \mathrm{GL}_n(k) \mid \det(A) = 1\}$.
2) $\mathrm{O}_n(k) := \{A \in \mathrm{GL}_n(k) \mid AA^t = I\}$.
3) $\mathrm{SO}_n(k) := \{A \in \mathrm{O}_n(k) \mid \det(A) = 1\}$.

Exercice 6 Soit $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont entiers. On note

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.
2) Montrer que S et T sont des éléments dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
3) Vérifier les relations suivantes :

$$S^2 = -I, \qquad (ST)^3 = -I.$$

Exercice 7 On désigne par S_n le groupe des bijections de $\{1, \cdots, n\}$ dans lui-même, où $n \geqslant 2$ est un entier.

1) Montrer que S_n est engendré par les permutations (12) et $(1, 2, \ldots, n)$.
2) Montrer que S_n est engendré par les transpositions.
3) Montrer qu'il existe au plus un homomorphisme non-trivial de S_n dans $\{\pm 1\}$.
4) Pour $\sigma \in S_n$, on note

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}.$$

Montrer que ε prend valeurs dans $\{\pm 1\}$ et est un homomorphisme de groupes.

5) Soit σ un élément dans S_n qui s'écrit comme le produit de m transpositions. Montrer que $\varepsilon(\sigma) = (-1)^m$.
6) Soit A_n le noyau de ε. Montrer que A_n est engendré par les 3-cycles.
7) Montrer que tous les 3-cycles sont conjugués dans A_n.
8) Soit H le sous-ensemble suivant de A_4 :

$$H := \{e, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}.$$

Montrer que H est un sous-groupe distingué de A_4.

Dans les questions suivantes, on suppose $n \geqslant 5$.

9) Soit H un sous-groupe distingué de A_n, $H \neq \{e\}$. Montrer que H contient au moins un 3-cycle.
10) En déduire que $H = A_n$.
11) Déterminer tous les sous-groupes distingués de S_n.

Exercice 8 1) Supposons que p est un nombre premier. Montrer que tout groupe d'ordre p est cyclique.

2) Montrer qu'un groupe d'ordre 4 est soit cyclique, soit isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.
3) Montrer qu'un groupe d'ordre 6 est soit cyclique, soit isomorphe à S_3.
4) Quels sont, à isomorphisme près, les groupes abéliens d'ordre 8.
5) Montrer qu'un groupe non-abélien G d'ordre 8, possède nécessairement un élément σ d'ordre 4 et que son centre Z contient deux éléments. Si $G \backslash \langle \sigma \rangle$ contient un élément τ d'ordre 2, montrer que $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}$, puis que G est isomorphe au groupe diédral D_8. Sinon, montrer que tous les éléments de $G \setminus Z$ sont d'ordre 4 et en déduire que G est isomorphe au groupe quaternionique $H_8 = \{1, -1, i, j, k, -i, -j, -k\}$ avec $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ et $ij = -ji = k$.