Université Paris 7 Denis Diderot
L3Math-Info (Algèbre et géométrie)
2009-2010

Feuille d'exercices III

Exercice 1 Soient G un groupe fini et V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$. On suppose que $\Phi : G \times V \to V$ est une action linéaire sur V. Autrement dit, pour tout $g \in G$, l'application $v \mapsto gv := \Phi(g, v)$ est $\mathbb{C}$-linéaire.

1) Pour tout $g \in G$, soit $\rho_V(g)$ l'endomorphisme de V qui envoie v en gv. Montrer que ρ_V est un homomorphisme de groupes de G vers $\mathrm{GL}(V)$.
2) Montrer que, pour tout $v \in V$, le sous-espace vectoriel engendré par $\mathrm{orb}(v)$ est stable par l'action du groupe G.
3) On dit que Φ est *irréductible* si $V \neq 0$ et si les sous-espaces vectoriels de V stables par l'action du groupe sont précisément 0 et V. Montrer que, si V est irréductible, alors $V = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(\mathrm{orb}(v))$ quel que soit $v \in V$, $v \neq 0$.
4) Soit $\langle\, , \rangle$ un produit hermitien sur V. Montrer que, la fonction complexe sur $V \times V$ définie par
$$\langle v_1, v_2\rangle_\Phi := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\langle gv_1, gv_2\rangle$$
est également un produit hermitien sur V.
5) Montrer que $\langle\, , \rangle_\Phi$ est invariant par l'action de G. Autrement dit, on a $\langle gv_1, gv_2\rangle_\Phi = \langle v_1, v_2\rangle_\Phi$ quels que soient $g \in G$ et $v_1, v_2 \in V$.
6) En déduire que, si W est un sous-espace vectoriel de V qui est stable par l'action du groupe G, alors il en est de même de son supplémentaire orthogonal $W^\perp$ par rapport à $\langle\, , \rangle_\Phi$.
7) Montrer qu'il existe des sous-espaces $V_1, \cdots, V_r$ dans V qui sont stables par l'action de G, irréductibles, et tels que
$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r.$$

Exercice 2 Soit G un groupe fini. On appelle *représentation* de G les données d'un espace vectoriel de rang fini V sur $\mathbb{C}$ ainsi qu'une action linéaire de G sur V (notée $(g, v) \mapsto gv$). La représentation est dite *irréductible* si l'action du groupe est irréductible. Si V_1 et V_2 sont deux représentations de G, on désigne par $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$ l'ensemble des applications linéaires de V_1 vers V_2 qui préservent l'action de G. Autrement dit,
$$\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) := \{f \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2) \,|\, \forall\, g \in G,\ \forall\, v \in V_1,\ f(gv) = gf(v)\}$$

1) Soient V_1 et V_2 deux représentations de G. Montrer que $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$.
2) Montrer que l'application $G \times \mathrm{Hom}(V_1, V_2) \to \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$, qui envoie (g, f) en $v \mapsto gf(g^{-1}v)$, est une action linéaire du groupe G. Vérifier que $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$ est le sous-ensemble des éléments invariants par G.

3) Soient V_1 et V_2 deux représentations irréductibles de G. Montrer que la dimension de $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$ est ou bien 0 ou bien 1. En outre, $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$ est non-nul si et seulement s'il existe un isomorphisme de V_1 vers V_2 qui préserve l'action du groupe G.

4) En déduire que, si V_1 et V_2 sont deux représentations irréductibles de G telles que $\dim(V_1) \neq \dim(V_2)$, alors $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) = \{0\}$.

Exercice 3 Soit G un groupe fini. Pour toute représentation V de G, on désigne par $\chi_V : G \to \mathbb{C}$ l'application telle que $\chi_V(g) = \mathrm{Tr}(\rho_V(g))$, où $\rho_V(g)$ est l'endomorphisme de V qui envoie v en gv. Cette application sera appelée le *caractère* de V.

1) Soit V une représentation de G. Montrer que la fonction χ_V est une *fonction centrale* sur G. Autrement dit, pour tous $h, g \in G$, on a

$$\chi_V(hgh^{-1}) = \chi_V(g).$$

Déterminer la valeur de $\chi_V(1)$.

2) Montrer que, si V est une représentation de G, alors $\chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$ quel que soit $g \in G$.

3) Montrer que, si V est une représentation de rang 1 de G, alors χ_V est un caractère linéaire de G.

4) Soient V_1 et V_2 deux représentations de G. Montrer que

$$\chi_{\mathrm{Hom}(V_1,V_2)}(g) = \overline{\chi_{V_1}(g)}\chi_{V_2}(g).$$

Exercice 4 Soit G un groupe fini. Si V_1 et V_2 sont deux représentation de G, on désigne par $M : \mathrm{Hom}(V_1, V_2) \to \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ l'application linéaire qui envoie f en

$$v \longmapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gf(g^{-1}v).$$

1) Soient V_1 et V_2 deux représentations irréductibles de G avec $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) = 0$. Montrer que, pour tout $f \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$, on a $M(f) = 0$.

2) Soit V une représentation irréductible de G. Montrer que, pour tout $f \in \mathrm{Hom}(V, V)$, $M(f)$ est une homothétie de rapport $\mathrm{Tr}(f)/\dim(V)$.

3) Soient V une représentation irréductible de G et φ une fonction centrale sur G. On désigne par $\rho_V : G \to \mathrm{GL}(V)$ l'homomorphisme de groupes correspondant à la représentation V. Montrer que

$$\sum_{g \in G} \varphi(g)\rho_V(g) = \frac{1}{\dim(V)} \sum_{g \in G} \varphi(g)\chi_V(g)\mathrm{Id}_V.$$

Exercice 5 Soit G un groupe fini. Soient $C(G)$ l'ensemble des fonctions centrales complexes sur G et $I(G)$ l'ensemble des caractères des représentations irréductibles de G.

1) Montrer que $C(G)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^G$.

Dans les questions suivantes, on munit $C(G)$ du produit hermitien

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\varphi(g)} \psi(g).$$

2) Montrer que, si V_1 et V_2 sont deux représentations irréductibles telles que $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) = 0$, alors $\langle \chi_{V_1}, \chi_{V_2} \rangle = 0$.
3) Montrer que, si V est une représentation irréductible, alors $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$.
4) Montrer que l'application $\Phi : G \times \mathbb{C}^G$, qui envoie (g, f) en $h \mapsto f(hg)$, est une action linéaire du groupe G.
5) En déduire que toute fonction centrale orthogonale à $I(G)$ est nulle.
6) En déduire que $I(G)$ est une base orthonormée de $C(G)$.