Université Paris 7 Denis Diderot
L3Math-Info (Algèbre et géométrie)
2009-2010

Feuille d'exercices IV

Dans cette feuille, le symbol p désigne un nombre premier. On dit qu'un groupe G est un *p-groupe* si tout élément de G est d'ordre une puissance de p.

Exercice 1 1) Soit G un p-groupe commutatif fini. Montrer qu'il existe des entiers strictement positifs $r_1 \leqslant \cdots \leqslant r_n$ tels que

$$G \cong (\mathbb{Z}/p^{r_1}\mathbb{Z}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}/p^{r_n}\mathbb{Z}).$$

2) Montrer que, si $r_1 \leqslant \cdots \leqslant r_n$ and $s_1 \leqslant \cdots \leqslant s_m$ sont deux familles d'entiers strictement positifs tels que

$$(\mathbb{Z}/p^{r_1}\mathbb{Z}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}/p^{r_n}\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/p^{s_1}\mathbb{Z}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}/p^{s_m}\mathbb{Z}),$$

alors on a $n = m$ et $(r_1, \cdots, r_n) = (s_1, \cdots, s_m)$.

Exercice 2 Soit m un entier positif tel que $p \nmid m$. Soit $n = p^r m$, où $r > 0$ est un entier. Si G est un groupe fini d'ordre n, on appelle *p-sous-groupe de Sylow* de G tout sous-groupe de cardinal p^r de G. Le but de cet exercice est de montrer que tout groupe d'ordre n admet au moins un p-sous-groupe de Sylow.

1) Soit P la famille des parties à p^r éléments de G. En utilisant l'action de G sur lui-même par multiplication à gauche, définir une action de G sur P.
2) Montrer qu'il existe une partie $A \in P$ dont l'orbite sous l'action de G est de cardinal premier à p.
3) Montrer que p^r divise le cardinal de $\mathrm{Stab}_G(A)$
4) En déduire que $\mathrm{Stab}_G(A)$ est d'ordre p^r. Conclure.

Exercice 3 Soit G un groupe fini. Le but de cet exercice est de montrer que, si p^r divise l'ordre du groupe G, alors G admet un sous-groupe d'ordre p^r. On désigne par Z le centre de G.

1) Montrer que, si $|Z|$ n'est pas divisible par p, alors il existe une classe de conjugaison de G dont le cardinale est $\geqslant 2$ et non-divisible par p.
2) En déduire que, si $p \nmid |Z|$, alors il existe un sous-groupe N de G tel que $[G : N]$ soit premier à p.
3) Conclure. [*Indication : on raisonne par récurrence sur G.*]

Exercice 4 Soient $m > 0$ un entier tel que $(p, m) = 1$ et $n = p^r m$ où $r > 0$ est un entier. Soit G un groupe de cardinal n.

1) Montrer que tout sous-groupe conjugué à un p-sous-group de Sylow est toujours un p-sous-groupe de Sylow.
2) Soit H un sous-groupe de G qui est un p-groupe. Montrer que H est contenu dans un p-sous-groupe de Sylow de G. [*Indication : Soit S un p-sous-groupe de Sylow. Considérer l'action de H sur le quotient G/S par multiplication à gauche.*]
3) Montrer que tous les p-sous-groupe de Sylow de G sont conjugués.
4) En déduire que le nombre des p-sous-groupe de Sylow de G divise m.
5) Soit S un p-sous-groupe de Sylow. En utilisant l'action par conjugaison de S sur l'ensemble de ses p-sous-groupe de Sylow, montrer que le nombre des p-sous-groupe de Sylow est congru à 1 modulo p.

Exercice 5 Soient n un entier strictement positif et impair et G un groupe d'ordre $2n$.

1) Montrer que G admet un élément h d'ordre 2.
2) Soit $\lambda : G \to \{1, \cdots, 2n\}$ une bijection. Montrer que l'application
$$\varphi : G \times \{1, \cdots, 2n\} \to \{1, \cdots, 2n\}$$
qui envoie (g, x) en $\lambda(g\lambda^{-1}(x))$ est une action de groupe.
3) En déduire un homomorphisme injectif $\varphi : G \to S_{2n}$.
4) Montrer que $\varphi(h)$ est une permutation impaire.
5) En déduire que G admet un sous-groupe distingué d'indice 2.

Exercice 6 Soit G un groupe d'ordre 455. Le but de cet exercice est de montrer que G est nécessairement un groupe cyclique.

1) Pour $p = 5$, 7 et 13, montrer que G admet un élément d'ordre p.
2) Pour $p = 7$ et 13, montrer que G a un unique p-sous-groupe de Sylow que l'on notera H_p.
3) Montrer que, ou bien G a un unique 5-sous-groupe de Sylow, ou bien G a 91 5-sous-groupe de Sylow.
4) Montrer que G a un élément d'ordre 35.
5) Conclure.

Exercice 7 Soit G un groupe fini.

1) Soit H un sous-groupe distingué de G. Montrer que, si $[G : H]$ n'est pas divisible par p, alors tout p-sous-groupe de Sylow est contenu dans H.
2) Soit K un sous-groupe distingué de G qui est un p-groupe. Montrer que tout p-sous-groupe de Sylow contient K.
3) Soient p et q deux nombres premiers tels que $(p, q) = 1$. Montrer que, si le cardinale de G est p^2q, alors le groupe G n'est pas un groupe simple.