Université Paris 7 Denis Diderot
L3Math-Info (Algèbre et géométrie)
2009-2010

Feuille d'exercices V

On convient que tous les anneaux sont commutatif et unifère, et vérifient $0 \neq 1$. On admet en outre la forme équivalente de l'axiome de choix comme la suite.

> **Lemme de Zorn.** *Pour tout ensemble ordoné non-vide S, si tout sous-ensemble totalement ordoné de S admet un majorant dans S, alors S a un élément maximal.*

Exercice 1 Soient A un anneau, I un idéal de A, $I \neq A$ et $\pi : A \to A/I$ la projection canonique.

1) Montrer que, si K est un idéal de A/I, alors $\pi^{-1}(K)$ est un idéal de A contenant I.
2) Soit J un idéal de A contenant I. Montrer que $\pi(J)$ est un idéal de A/I et que A/J est isomorphe à $(A/I)/(J/I)$.
3) Montrer que l'application $K \mapsto \pi^{-1}(K)$ définit une bijection entre l'ensemble des idéaux de A/I et l'ensemble des idéaux J de A contenant I.

Exercice 2 Soit $\mathbb{A}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \cdots\}$ vers $\mathbb{C}$. On munit $\mathbb{A}$ des lois internes suivantes :

$$(f+g)(n) = f(n) + g(n), \qquad (f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d).$$

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ est multiplicative si $f(1) = 1$ et si $f(ab) = f(a)f(b)$ pour tous entiers a, b tels que $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$. On désigne par $\mathbb{M}$ l'ensemble des fonctions multiplicatives sur $\mathbb{N}^*$.

1) Montrer que $(\mathbb{A}, +, *)$ est un anneau commutatif et unifère. Déterminer l'élément unité δ et l'élément neutre $\mathbf{0}$ de $\mathbb{A}$.
2) Montrer qu'une fonction $f \in \mathbb{A}$ est inversible pour la loi $*$ si et seulement si $f(1) \neq 0$. En déduire que $\mathbb{M} \subset \mathbb{A}^\times$.
3) Montrer que si f est une fonction multiplicative, alors il en est de même de f^{-1}. En déduire que $\mathbb{M}$ est un sous-groupe de $\mathbb{A}^\times$.
4) Soit μ la fonction sur $\mathbb{N}^*$ qui envoie n en 0 si n a un facteur carré $\neq 1$, et en $(-1)^d$ si n n'a pas de facteur carré $\neq 1$ et a exactement d facteurs premiers. Montrer que μ est une fonction multiplicative.
5) Soit I la fonction constante sur $\mathbb{N}^*$ qui prend valeur 1. Montrer que I est une fonction multiplicative et en déduire que $\mu * I = \delta$.
6) Soit N la fonction sur $\mathbb{N}^*$ telle que $N(n) = n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, soit $\varphi(n)$ le cardinale de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. Montrer que

$$\varphi(n) = \sum_{m=1}^{n} \delta\big(\mathrm{pgcd}(m, n)\big)$$

et en déduire que $\varphi = \mu * N$.

7) En déduire que

$$\varphi(n) = n \prod_{\substack{p|n \\ p \text{ premier}}} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big).$$

8) Établir l'égalité suivante :

$$\mu * \log = -\mu \log * I,$$

où $\mu \log$ désigne la fonction qui envoie n en $\mu(n) \log n$.

9) Pour tout entier n, soit $\tau(n)$ le nombre des facteurs de n. Montrer que la fonction τ est multiplicative.

Exercice 3 Soit A un anneau. Le but de cet exercice est de montrer que tout idéal $\mathfrak{a}$ de A est contenu dans un idéal maximal.

1) Soit Θ la famille des idéaux de A contenant $\mathfrak{a}$ et différents de A, ordonée par la relation d'inclusion. Si Θ_0 est un sous-ensemble totalement ordoné de Θ, montrer que $\bigcup_{I \in \Theta_0} I$ est un élément dans Θ.
2) En déduire que l'ensemble Θ admet un élément maximal. Conclure.

Exercice 4 Soit A un anneau commutatif et unifère. Montrer que tout idéal maximal de A est nécessairement premier. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 5 Soient A et B deux anneaux, et $f : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux.

1) Montrer que, si J est un idéal de B, alors $f^{-1}(J)$ est un idéal de A.
2) Montrer que, si $\mathfrak{q}$ est un idéal premier de B, alors $f^{-1}(\mathfrak{q})$ est un idéal premier de A. L'analogue de ce résultat pour les idéaux maximaux est-il vrai ?

Exercice 6 Soient A un anneau et $\mathfrak{a}$ un idéal de A tel que $\mathfrak{a} \neq A$. On désigne par $\pi : A \to A/\mathfrak{a}$ la projection canonique. Montrer que l'application $\mathfrak{p} \mapsto \pi^{-1}(\mathfrak{p})$ est une bijection

1) entre l'ensemble des idéaux premiers de $A/\mathfrak{a}$ et celui des idéaux premiers de A contenant $\mathfrak{a}$,
2) entre l'ensemble des idéaux maximaux de $A/\mathfrak{a}$ et celui des idéaux maximaux de A contenant $\mathfrak{a}$.

Exercice 7 Soit A un anneau. On désigne par $\mathfrak{n}_A$ l'ensemble des éléments nilpotent de A. Autrement dit,

$$\mathfrak{n}_A := \{x \in A \mid \exists\, n \in \mathbb{N},\, x^n = 0\}.$$

1) Montrer que, si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A, alors $\mathfrak{n}_A \subset \mathfrak{p}$.
2) Soit x un élément de A qui n'est pas nilpotent. On désigne par Θ la famille des idéaux de A ne rencontrant pas $\{x^n,\, n \in \mathbb{N}\}$.
   a) Montrer que Θ est non-vide et qu'il existe un idéal premier de A dans Θ.
   b) En déduire que $\mathfrak{n}_A$ est l'intérsection des idéaux premiers de A.
3) Soient $\mathfrak{a}$ un idéal de A tel que $\mathfrak{a} \neq A$ et

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{a}) := \{x \in A \mid \exists\, n \in \mathbb{N},\, x^n \in \mathfrak{a}\}.$$

   Montrer que $\mathfrak{n}(\mathfrak{a})$ est l'intersection de tous les idéaux premiers de A contenant $\mathfrak{a}$.