Université Paris 7 Denis Diderot
L3Math-Info (Algèbre et géométrie)
2009-2010

Feuille d'exercices VI

Sauf mention au contraire, tous les anneaux sont supposés être commutatifs et unifères, et vérifier $0 \neq 1$.

Exercice 1 Soit A un anneau. On suppose que A est *local*, autrement dit, A n'admet qu'un idéal maximal $\mathfrak{m}$. Soit $k = A/\mathfrak{m}$ (appelé le *corps résiduel* de A).

1) Montrer que, $a \in A$ est inversible si et seulement si $(a) = A$. En déduire que $A^\times = A \setminus \mathfrak{m}$.
2) Soit $\mathfrak{m}^1 := \mathfrak{m}$. On définit de façon récursive $\mathfrak{m}^i$ ($i \geqslant 2$) comme l'idéal de A engendré par
$$\{ay \mid a \in \mathfrak{m},\, y \in \mathfrak{m}^{i-1}\}.$$
Montrer que, si $i > j \geqslant 1$, alors $\mathfrak{m}^i$ est contenu dans $\mathfrak{m}^j$. En déduire un homomorphisme surjectif $\phi_{ij} : A/\mathfrak{m}^i \to A/\mathfrak{m}^j$.
3) Pour tout entier $i > 1$, soit $A_i := A/\mathfrak{m}^i$. Montrer que l'espace
$$\mathfrak{A} := \prod_{i \geqslant 1} A_i$$
est naturellement muni d'une structure d'anneau de telle sorte que les projections $\pi_i : \mathfrak{A} \to A_i$ sont des homomorphismes d'anneaux.
4) Soit $\widehat{A}$ la partie de $\mathfrak{A}$ des suites $(a_1, a_2, \cdots)$ telles que $\phi_{ij}(a_i) = a_j$ quels que soient $1 \leqslant j < i$. Montrer que $\widehat{A}$ est un sous-anneau de $\mathfrak{A}$.
5) Pour tout $i \geqslant 1$, on désigne par $p_i : A \to A/\mathfrak{m}^i$ l'homomorphisme canonique. Montrer que l'application Φ de A vers $\mathfrak{A}$, qui envoie x en $(p_1(x), p_2(x), \cdots)$, est un homomorphisme d'anneaux, et prend ses valeurs dans $\widehat{A}$.
6) Montrer que $(a_1, a_2, \cdots) \in \widehat{A}$ est inversible si et seulement si $a_1 \neq 0$. En déduire que $\widehat{A}$ est un anneau local. Préciser son idéal maximal $\widehat{\mathfrak{m}}$.
7) Montrer que le noyau de l'homomorphisme composé $A \to \widehat{A} \to \widehat{A}/\widehat{\mathfrak{m}}^i$ est $\mathfrak{m}^i$. En déduire que $\widehat{A}/\widehat{\mathfrak{m}}^i$ est isomorphe à $A/\mathfrak{m}^i$.
8) Montrer que $\bigcap_{i \geqslant 1} \widehat{\mathfrak{m}}^i = (0)$.

Les questions 9) — 12) sont pour but de montrer que, si A est noethérien, alors il en est de même de $\widehat{A}$. Dans la suite, on suppose que A est un anneau noethérien.

9) Montrer que, pour tout entier $i \geqslant 1$, le groupe quotient $\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$ est un espace vectoriel de rang fini sur k. Montrer que $\widehat{\mathfrak{m}}^i/\widehat{\mathfrak{m}}^{i+1} \cong \mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$ pour tout i.
10) On désigne par $\mathrm{gr}(A)$ la somme directe
$$k \oplus \bigoplus_{i \geqslant 1} \mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}.$$
Montrer que, l'espace $\mathrm{gr}(A)$, muni des lois que l'on précisera, est un anneau commutatif et unifère.

11) Soit $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ une base de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Montrer que l'homomorphisme $f : k[T_1, \cdots, T_n] \to \mathrm{gr}(A)$ qui envoie T_i en λ_i est surjectif. En déduire que $\mathrm{gr}(A)$ est un anneau noethérien.

12) Pour $x = (a_1, a_2, \cdots) \in \widehat{A}$, $x \neq 0$, soient $i(x) := \min\{j \in \mathbb{N}_* \mid a_j \neq 0\}$ et $g(x)$ l'image canonique de $a_{i(x)}$ dans $\widehat{\mathfrak{m}}^{i(x)}/\widehat{\mathfrak{m}}^{i(x)+1} \cong \mathfrak{m}^{i(x)}/\mathfrak{m}^{i(x)+1}$, vu comme un élément dans $\mathrm{gr}(A)$. Soient I un idéal de $\widehat{A}$ et $\mathfrak{a}$ l'idéal de $\mathrm{gr}(A)$ engendré par $g(I)$.
    (a) Montrer que $\mathfrak{a}$ est un idéal de type fini.
    (b) Montrer que, si $\mathfrak{a}$ est engendré par $g(x_1), \cdots, g(x_n)$, alors I est engendré par $x_1, \cdots, x_n$. Conclure.

13) Montrer que, si A est noethérien, alors $\widehat{\mathfrak{m}}$ est engendré par $\Phi(\mathfrak{m})$.

Exercice 2 Soient A un anneau intègre et K son corps des fractions. Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, soit $A_\mathfrak{p}$ le sous-ensemble de K des fractions de la form a/b où $b \notin \mathfrak{p}$.

1) Montrer que $A_\mathfrak{p}$ est un sous-anneau de K contenant A.
2) Montrer que $A_\mathfrak{p}$ est un anneau local et déterminer son idéal maximal.
3) Pour tout idéal I de A, soit $I_\mathfrak{p}$ l'idéal de $A_\mathfrak{p}$ engendré par I. Montrer que $\mathfrak{q} \mapsto \mathfrak{q}_\mathfrak{p}$ définit une bijection entre l'ensemble des idéaux premiers de A contenu dans $\mathfrak{p}$ et celui des idéaux premiers de $A_\mathfrak{p}$.
4) Montrer que, si A est un anneau noethérien, alors il en est de même de $A_\mathfrak{p}$.
5) Montrer que le corps résiduel de $A_\mathfrak{p}$ s'identifie au corps des fractions de $A/\mathfrak{p}$.

Exercice 3 Soit M un groupe abélien. Montrer que l'ensemble $\mathrm{End}(M)$ des endomorphismes de M, muni des lois de composition que l'on précisera, est un anneau (non-nécessairement commutatif).

Exercice 4 Soit A un anneau (non-nécessairement commutatif). On appelle *A-module* (à gauche) tout groupe abélien M muni d'un morphisme d'anneaux $f : A \to \mathrm{End}(M)$. Si $a \in A$ et $x \in M$, on note ax l'élément $f(a)(x)$ dans M.

1) Soit M un A-module. Montrer que, pour tous les $a, b \in A$, $x, y \in M$, on a
$$a(x+y) = ax + ay,\ (a+b)x = ax + bx,\ 1x = x,\ (ab)x = a(bx).$$
2) Supposons que M est un groupe et $\Phi : A \times M \to M$ est une application qui vérifie les relations
$$\Phi(a, x+y) = \Phi(a,x) + \Phi(a,y),\ \Phi(a+b,x) = \Phi(a,x) + \Phi(b,x),$$
$$\Phi(1,x) = x,\ \Phi(ab,x) = \Phi(a, \Phi(b,x))$$
pour tous les $a, b \in A$ et $x \in M$, alors Φ détermine une structure de A-module sur M de telle sorte que $ax = \Phi(a,x)$ quel que soient $a \in A$ et $x \in M$.
3) Soient M un A-module et M_1 un sous-groupe de M qui est stable par l'action de A. Autrement dit, l'image de $A \times M_1$ dans M par l'application $(a,x) \mapsto ax$ est contenue dans M_1. Montrer que M_1 est naturellement muni d'une structure de A-module que l'on précisera. Un tel sous-groupe sera appelé un *sous-A-module* de M dorénavant.
4) Soient M un A-module et M_1 un sous-A-module de M. Montrer que le groupe quotient M/M_1 est naturellement muni d'une structure de A-module que l'on précisera. Un tel groupe quotient sera appelé un *A-module quotient* dorénavant.