Université Paris 7 Denis Diderot
L3Math-Info (Algèbre et géométrie)
2009-2010

Feuille d'exercices VIII

Dans cette feuille d'exercices, k désigne un corps commutatif. Si K est un corps contenant k, on dit que K/k est une *extension* de corps. On dit qu'une extension K/k est *algébrique* si tout élément de K est une racine d'un polynôme à coefficients dans k. On dit que K/k est une extension *finie* si K est un espace vectoriel de rang fini sur k.

Exercice 1 Soit K/k une extension algébrique et $\alpha \in K$. Pour tout $\alpha \in K$, on désigne par $f_\alpha : k[X] \to K$ l'homomorphisme que envoie $P \in k[X]$ en $P(\alpha)$.

1) Montrer que le noyau de f_α est un idéal maximal de $k[X]$.
2) Soit $k[\alpha]$ l'image de f_α. Montrer que $k[\alpha]$ est un sous-corps de K et s'identifie au plus petit sous-corps $k(\alpha)$ de K contenant $k \cup \{\alpha\}$.
3) Montrer que l'extension $k(\alpha)/k$ est finie.
4) Montrer que tout sous-anneau de K contenant k est un corps.
5) Montrer que, pour tout sous-corps K' de K contenant k, l'extension K/K' est algébrique.
6) Montrer que, si $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ est une famille finie d'éléments dans K, alors le corps

$$k(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) := k(\alpha_1)(\alpha_2)\cdots(\alpha_n)$$

est un espace vectoriel de rang fini sur k.

Exercice 2 Soit L une k-algèbre intègre qui est de rang fini (comme espace vectoriel sur k).

1) Montrer que L est un corps.
2) Montrer que l'extension L/k est algébrique.

Exercice 3 Le but de cet exercice est de montrer que, si K/k et L/K sont deux extensions algébriques, alors L/k est également une extension algébrique.

1) Soit α un élément de L. Montrer qu'il existe des éléments $a_1, \cdots, a_n$ de K tels que α est une racine d'un polynôme à coefficients dans $k(a_1, \cdots, a_n)$.
2) Soit $K' = k(a_1, \cdots, a_n)$. Montrer que l'extension $K'(\alpha)/K'$ est finie.
3) En déduire que $K'(\alpha)/k$ est une extension finie.
4) Conclure.

Exercice 4 Le but de cet exercice est de montrer que, si L/k est une extension et s'il existe une famille finie $(a_1, \cdots, a_n)$ d'élément dans L telle que $L = k[a_1, \cdots, a_n]$. Alors l'extension L/k est finie.

1) Montrer que, si $\alpha \in L$ est tel que $k[\alpha] = k(\alpha)$, alors l'extension $k(\alpha)/k$ est algébrique.
2) Soient A un anneau intègre, F le corps de fractions de A et B un sous-anneau de F contenant A. Montrer que, si F est de type fini comme un B-module, alors $B = F$.

3) Soit P un élément non-nul de $k[X]$. Montrer que l'anneau $k[X, P^{-1}]$ est strictement contenu dans $k(X)$.

4) Conclure par récurrence sur n.

5) Application : montrer que, si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de l'anneau des polynômes $S = k[X_1, \cdots, X_n]$, alors $S/\mathfrak{m}$ est un espace vectoriel de rang fini sur k.

Exercice 5 Soit $D : k[X] \to k[X]$ l'application k-linéaire telle que

i) $D(X^n) = nX^{n-1}$ quel que soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

ii) $D(1) = 0$.

Si $m \geq 1$ est un entier, on désigne par $D^m : k[X] \to k[X]$ l'application composée $\underbrace{D \circ D \circ \cdots \circ D}_{m \text{ copies}}$. Enfin, on note D^0 l'application d'identité de $k[X]$ vers lui-même.

1) Montrer que $D(X^{n+m}) = X^n D(X^m) + X^m D(X^n)$ quel que soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.

2) En déduire que $D(PQ) = PD(Q) + QD(P)$ quels que soient P et Q dans $k[X]$.

3) En déduire que, pour tous les $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $P \in k[X]$ et $Q \in k[X]$,

$$D^m(PQ) = \sum_{i=0}^{m} C_m^i D^i(P) D^{m-i} Q.$$

4) Soient $a \in k$ et $n \in \mathbb{N}$ quelconques, déterminer $D((X-a)^n)$.

5) Montrer que, pour tout polynôme $P \in k[X]$, il existe $Q \in k[X]$ tel que $P(X) - P(a) = (X-a)Q(X)$.

6) Soient $P \in k[X]$, $a \in k$ et $Q \in k[X]$ tel que $(X-a)Q = P - P(a)$. Montrer que, pour tout entier $m \geq 1$, $(m+1)D^m Q(a) = D^{m+1}P(a)$.

7) On suppose que $\mathrm{car}(k) = 0$. Montrer que, si P est un polynôme de degré n dans $k[X]$ et si $a \in k$ est quelconque, alors

$$P = P(a) + DP(a)(X-a) + \frac{D^2P(a)}{2!}(X-a)^2 + \cdots + \frac{D^nP(a)}{n!}(X-a)^n.$$

8) Soit P un polynôme non-nul. On rappelle que la multiplicité d'une racine a de P est par définition le plus grand entier naturel $m \in \mathbb{N}$ tel que $(X-a)^m$ divise P. Montrer que, a est une racine de multiplicité 1 si et seulement si $P(a) = 0$ et $DP(a) \neq 0$. En outre, si $\mathrm{car}(k) = 0$, alors la multiplicité de a est égale au plus grand entier naturel $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$P(a) = DP(a) = \cdots = D^{m-1}P(a) = 0.$$

9) Montrer que, si $P \in k[X]$ est un polynôme irréductible de degré ≥ 1 tel que $DP \neq 0$, alors $(P, DP) = k[X]$.

10) Montrer que, si k est parfait, alors pour tout polynôme irréductible de degré ≥ 1, on a $DP \neq 0$.

11) En déduire que, si k est parfait et si P est un polynôme irréductible dans $k[X]$, alors pour toute extension L/k, le polynôme P n'a pas de racine multiple dans L.