Université Paris 7 Denis Diderot
L3 Math-Info (Algèbre et géométrie)
2009-2010

Contrôle de connaissance
du mardi 20 octobre 2009
Durée 2 h 30

Questions de cours (Les questions sont indépendantes)

1) Soit G un groupe. Montrer que G est abélien si et seulement si l'application $I : G \to G$ définie par $I(x) = x^{-1}$ est un morphisme de groupes.
2) Soient G un groupe et H un sous-ensemble de G. On suppose que, pour tous éléments x, y de H, on a $xy \in H$.
   (a) Si G est fini montrer que H contient l'élément unité de G (on pourra considérer le sous-groupe engendré par un élément de H). En déduire que H est un sous-groupe de G.
   (b) Sinon construire un exemple d'un groupe G et d'un tel sous-ensemble H de G qui n'est pas un sous-groupe de G.
3) Soit $G = \langle a \rangle$ un groupe cyclique d'ordre p^n engendré par a, où p est un nombre premier, $n \geqslant 1$.
   (a) Déterminer le nombre de morphismes de groupes de G dans lui-même.
   (b) Soit $f : G \to G$ un morphisme de groupes. Montrer que f est un isomorphisme si et seulement s'il existe un entier m vérifiant $\mathrm{pgcd}(p, m) = 1$ et tel que pour tout $x \in G$ on ait $f(x) = x^m$.
   (c) En déduire le cardinal du groupe d'automorphismes de G.
4) Pour $n \geqslant 1$, soit S_n le groupe de bijections de $\{1, \cdots, n\}$ vers lui-même.
   (a) Dans le groupe S_n, combien y a-t-il de permutations de signature -1 ?
   (b) Déterminer la signature de la permutation $(1, \cdots, n)$.

Exercice

On désigne par $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices de taille 2×2 à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et de déterminant 1. On note

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $\mathbb{H}$ le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ des nombres complexes à partie imaginaire strictement positive.

1. Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, muni de la loi de multiplication de matrices, est un groupe non-abélien.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Calculer SA et $T^n A$ ($n \in \mathbb{Z}$).

TSVP

3. Montrer que le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est engendré par S et T. [*Indication : On peut considérer l'action du sous-groupe engendré par S et T à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ par multiplication à gauche.*]
4. Montrer que l'application $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \to \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z := \frac{az+b}{cz+d}$$

   est une action du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
5. Soit z un nombre complexe non-réel. Calculer $S \cdot z$ et $T \cdot z$.
6. Montrer que, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, alors

$$\mathrm{Im}(A \cdot z) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}$$

   pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. En déduire que $\mathbb{H} \subset (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ est stable sous l'action du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
7. Déterminer le groupe $\mathrm{Stab}(i)$. Ce groupe est-il un sous-groupe distingué de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$?
8. Soit Γ le domaine

$$\{z \in \mathbb{H} \,:\, |z| > 1,\ -1/2 < \mathrm{Re}(z) \leqslant 1/2\} \cup \{e^{i\theta} \,:\, \pi/3 \leq \theta \leq \pi/2\}.$$

   (a) Dessiner le domaine Γ.
   (b) Soit $z \in \mathbb{H}$. Montrer que la fonction $f_z : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}_+$, $f_z(A) = \mathrm{Im}(A \cdot z)$, atteint son maximum.
   (c) En déduire que, pour tout $z \in \mathbb{H}$, l'orbite de z par l'action du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ admet un point commun et un seul avec le domain Γ.