PARIS 7 | MT1
2009-2010 | Section E

FEUILLE D'EXERCICES N° 1

*Identités remarquables*

**Exercice 1.** Montrer que

$$xy = \frac{1}{4}[(x+y)^2 - (x-y)^2].$$

**Exercice 2.** *a*) Montrer que

$$(a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd.$$

On peut abréger le second membre sous la forme $\sum a^2 + 2\sum ab$, où la notation $\sum a^2$ signifie somme des termes du type $a^2$ (carrés), et où $\sum ab$ signifie somme des termes du type $ab$ (produit de deux variables distinctes, parfois appelés termes rectangles).

*b*) Montrer qu'avec le même type de notation, on peut écrire

$$(a+b+c+d)^3 = \sum a^3 + 3\sum a^2 b + 24\sum abc.$$

*c*) Calculer $(a+b+c+d)^3$

**Exercice 3.** Dans le développement de $(a+b-c)^6$, combien y a-t-il de termes précédés d'un signe plus et de termes précédés d'un signe moins ? (Un terme du genre $2abc^4$ compte pour deux.)

**Exercice 4.** Soit $\mathrm{P}(x) = ax^3+bx^2+cx+d$. On suppose $a \neq 0$. Soit $\alpha$ un réel. Montrer qu'on a

$$\mathrm{P}(x) - \mathrm{P}(a) = (x-a)\mathrm{Q}(x)$$

où $\mathrm{Q}(x)$ est un polynôme du second degré. En déduire que si $\alpha$ est racine de l'équation $\mathrm{P}(x) = 0$, on peut mettre en facteur $x-\alpha$ dans $\mathrm{P}(x)$.

**Exercice 5.** *a*) Vérifier l'identité

$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

*b*) Quelles identités obtient-on en faisant $c = 0$ ? en faisant $c = -a-b$ ?

*Moyennes*

**Exercice 6.** Le prix d'un produit X a augmenté de 20 % la première année et de 30 % la seconde année (pour fixer les idées, il a augmenté de 20 % entre le 1er janvier 2007 et le 1er janvier 2008, de 30 % entre le 1er janvier 2008 et le 1er janvier 2009).

L'augmentation totale sur deux ans est-elle égale, supérieure ou inférieure à 50 % ? L'augmentation moyenne par an est-elle égale, supérieure ou inférieure à 25 % ? *Répondre sans calculer,* puis vérifier.

**Exercice 7.** Un cycliste fait l'ascension d'un col, d'une longueur de 20 km, à la vitesse $u$. Il fait la descente (de l'autre côté), de 20 km également, à la vitesse $v$. Quelle est sa vitesse moyenne sur le parcours total de 40 km ?

Comparer cette vitesse à $a = \frac{1}{2}(u+v)$.

**Exercice 8.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui conserve la moyenne arithmétique, c'est-à-dire telle que

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

On suppose $f$ dérivable. Montrer que $f$ est une fonction affine.

(Le même résultat est encore vrai si on suppose seulement que $f$ est continue, mais il devient bien plus difficile à démontrer.)

**Exercice 9.** Donner des exemples de fonctions telles que

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

quels que soient les réels $x>0$ et $y>0$. Donner aussi des exemples de fonctions telles que

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \geqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

quels que soient les réels $x>0$ et $y>0$. Donner des exemples de fonctions ne possédant aucune des deux propriétés.

**Exercice 10.** On part de deux nombres $a$ et $b$ strictement positifs. On définit deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$ par les relations

$$a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

avec les valeurs initiales $a_0 = a$, $b_0 = b$. Expérimenter avec quelques valeurs de $a$ et $b$, et tirer de là une stratégie pour montrer que $a_n$ et $b_n$ convergent vers une même limite.

Cette limité est notée $\mathrm{M}(a,b)$ et on dit que c'est la *moyenne arithmético-géométrique* de $a$ et $b$.

*Inégalités*

**Exercice 11.** Démontrer les inégalités ci-dessous :

$$x+\frac{1}{x} \geqslant 2 \quad (x>0)\,; \qquad xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2) \quad (x,y \text{ réels})$$

$$(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2) \quad (a,b \text{ réels})\,; \qquad \frac{a^2+b^2}{a+b} \geqslant \frac{a+b}{2} \quad (a,b \geqslant 0)$$

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc \quad (a,b,c \geqslant 0)$$

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca \quad (a,b,c \text{ réels})$$

$$\sqrt{ab}+\sqrt{cd} \leqslant \sqrt{(a+d)(b+c)} \quad (a,b,c,d \geqslant 0)$$

$$abc(a+b+c) \geqslant a^3b+b^3c+c^3a \quad (a,b,c \geqslant 0)$$

$$\frac{a+b+c}{abc} \leqslant \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \quad (a,b,c \geqslant 0)$$

N.B. Certaines de ces inégalités sont très faciles à démontrer, d'autres sont assez difficiles.

**Exercice 12.** Soient $a,b,c$ les côtés d'un triangle rectangle ($c$ est l'hypoténuse). Démontrer que pour $n$ entier $>2$ on a $c^n > a^n + b^n$.

**Exercice 13.** Soient $a,b,c$ les côtés d'un «vrai» triangle. Démontrer qu'on a

$$\frac{3}{2} < \frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} < 2$$

(*Indication.* Faire intervenir le demi-périmètre $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ et observer que $a<p<b+c$, etc.)

**Exercice 14.** Soient $a,b,c>0$. Montrer que

$$(a+b)\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\Big) \geqslant 4, \qquad (a+b+c)\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big) \geqslant 9$$

(utiliser l'inégalité $x+1/x \geqslant 2$ $(x>0)$). Généraliser.

**Exercice 15.** Montrer que pour $x>-1$ on a

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx$$

*a*) en étudiant les variations d'une fonction ;
*b*) sans utiliser d'analyse.

*Séries géométriques*

**Exercice 16.** Exprimer le nombre rationnel $x = 2{,}754545454\ldots$ sous forme d'une fraction.

**Exercice 17.** Vérifier que le développement décimal de $1/7$ est périodique. Observez d'autres propriétés de ce développement décimal.