FEUILLE D'EXERCICES N° 2

Inégalités (suite)

1. Montrer que $2^n > n^2$ pour tout entier $n \geqslant 5$.

2. Montrer que $(1+x)^n \geqslant 1+nx$ pour tout $x \geqslant 0$ et tout entier $n \geqslant 1$.

3. Montrer que $(1-x)^n + (1+x)^n < 2^n$ pour tout x, $|x| < 1$ et tout entier $n \geqslant 2$.

4. Soit a un nombre réel, $a > 1$. Montrer que pour tout entier n suffisamment grand, on a $a^n > n$.

5. Montrer que $2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

6. Montrer que $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < 1/(2\sqrt{n})$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

7. Montrer que $\sqrt[m]{n+1} - \sqrt[m]{n} < \frac{1}{m} n^{-\frac{m-1}{m}}$ pour tous les entiers $n \geqslant 1$ et $m \geqslant 2$.

8. Montrer que $n^{n/2} < n! < n^n$ pour tout entier $n \geqslant 3$.

9. Montrer que $1 \leqslant \sqrt[n]{n} \leqslant 1 + \sqrt{2/n}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

10. Soient a et b deux nombres réels. Montrer les inégalités suivantes :

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

11. Soient a et b deux nombres réels tels que $|a| < 1$, $|b| < 1$. Montrer

$$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right| < 1.$$

12. Montrer que, pour tout $x \in [0, \pi/2]$, on a $\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$.

13. Montrer que, pour tout nombre réel x, on a $(\cos x)^2 \geqslant 1 - x^2$. En déduire que, pour tout nombre réel x, $0 < |x| < 1$, on a

$$\sqrt{1-x^2} \leqslant \sin(x)/x \leqslant 1.$$

14. Pour tout entier $n \geqslant 1$, soient

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Montrer que $a_n < a_{n+1}$ et que $b_n > b_{n+1}$ pour tout n.

L'espace

15. Montrer que, si A, B, C, D forment un quadrilatère de l'espace, les milieux des côtés sont dans un même plan et forment un parallélogramme.

16. Montrer que ABCD est un parallélogramme si et seulement si les diagonales se coupent en leur milieu.

17. Montrer que, si ABCD est un losange, ses diagonales sont perpendiculaires. La réciproque est-elle vraie ?

18. Montrer que ABCD est un rectangle si et seulement si les diagonales se coupent en leur milieu et ont la même longueur.

19. L'inégalité de Schwarz pour deux vecteurs du plan s'écrit en coordonnées dans une base orthonormée

$$|uu' + vv'| \leqslant \sqrt{u^2+v^2}\sqrt{u'^2+v'^2}.$$

Démontrer cette inégalité par un calcul direct.

20. De tous les quadrilatères planaires de même périmètre, lequel a la plus grande aire ? Justifier votre réponse.

21. Soit ABC un triangle. Montrer que $|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{MB}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{MC}}|^2$ atteint son minimum au barycentre de A, B, C.