Université Paris Diderot
M1 Arithmétique
2009-2010

Feuille d'exercices III

Exercice 1 Soit p un nombre premier tel que $p \equiv 1 \pmod 4$.

1) Montrer qu'il existe un caractère χ de $\mathbb{F}_p^\times$ qui est d'ordre 4.
2) Montrer que l'image de χ est $\{\pm 1, \pm i\}$.
3) En déduire que la somme de Jacobi $J(\chi, \chi)$ est dans $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$.
4) En déduire qu'il existe deux entiers a et b tels que $p = a^2 + b^2$. [*Indication : on utilise les résultats de l'exercice 8 de la feuille 2.*]

Exercice 2 Pour tout entier strictement positif n et tout nombre premier p, on désigne par $v_p(n)$ l'exposant de p dans la décomposition canonique de n en produit de puissances de nombres premiers. On désigne par Ω la classe des entier strictement positif n qui vérifie la condition suivante :

$$\forall \text{ nombre premier } p, \quad p \equiv 3 \pmod 4 \Longrightarrow v_p(n) \text{ est pair.}$$

Le but de cet exercice est de montrer que l'ensemble Ω s'identifie à la classe des entiers exprimables comme la somme de deux carrés. Dans la suite, on désigne par h la fonction indicatrice de l'ensemble des sommes de deux carrés.

1) Soient a, b, c et d quatre entiers. En exprimant $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ comme la somme de deux carrés, montrer que la fonction h vérifie $h(mn) \geq h(m)h(n)$ $(m, n \in \mathbb{N}_*)$.
2) En déduire que, pour tout $n \in \Omega$, on a $h(n) = 1$.
3) Soit $n = a^2 + b^2$ un entier strictement positif avec $a, b \in \mathbb{Z}$. On suppose que p soit un nombre premier tel que $v_p(n) = 2s + 1$, $s \in \mathbb{N}$.
   (i) Montrer que, $\min(v_p(a), v_p(b)) \leq s$.
   (ii) On suppose que $t = v_p(a) \leq s$. Montrer que $v_p(b) = t$.
   (iii) En déduire qu'il existe deux entiers α et β tels que $p \mid \alpha^2 + \beta^2$ et que $p \nmid \alpha\beta$.
   (iv) En déduire que $p \equiv 1 \pmod 4$.
4) Conclure.

Exercice 3 Soient n un entier strictement positif et p un nombre premier.

1) Soit k un entier positif ou nul. Montrer que le nombre des entiers strictement positifs $m \leq n$ qui sont divisibles par p^k est $\lfloor n/p^k \rfloor$.
2) En déduire que
$$v_p(n!) = \sum_{k \geq 1} \lfloor n/p^k \rfloor.$$
3) Montrer que
$$\frac{n}{p} - 1 < v_p(n!) \leq \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}.$$

Exercice 4 Dans cet exercice, le symbol p désigne un nombre premier générique. Pour tout $x > 0$, on désigne par $\pi(x)$ le nombre des nombres premiers $\leq x$. Autrement dit, $\pi(x) := \sum_{p \leq x} 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}_*$, soit d_n le ppcm de $1, 2, \ldots, n$.

1) Soit m un entier dans $\mathbb{N}_*$. Montrer que $\binom{2m+1}{m} \leq 4^m$. En déduire que
$$\prod_{m+1<p\leq 2m+1} p \leq 4^m.$$
2) Montrer que $\prod_{p\leq n} p \leq 4^n$. [*Indication : récurrence sur n.*]
3) En déduire que
$$\pi(n) \leq \frac{n \ln 4}{\ln t} + t$$
quel que soit $t \in]1, n]$.
4) En déduire que
$$\pi(n) \leq \Big(2 \ln 4 + 1\Big) \frac{n}{\ln n}$$
dès que $n \geq 4$.
5) Montrer que $\pi(n) \geq \ln(d_n) / \ln(n)$.
6) Pour tous entiers $1 \leq m \leq n$, soit $I(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-m}\, \mathrm{d}x$.
   (i) Montrer que $d_n I(m, n) \in \mathbb{Z}$.
   (ii) Montrer que $I(m, n)^{-1} = m\binom{n}{m}$.
   (iii) En déduire que $n\binom{2n}{n} \mid d_{2n}$ et $(n+1)\binom{2n+1}{n} \mid d_{2n+1}$.
   (iv) Montrer que $n(2n+1)\binom{2n}{n} \mid d_{2n+1}$, en déduire que $d_{2n+1} \geq n4^n$.
7) Monter que $d_n \geq 2^n$ quel que soit $n \geq 7$. En déduire que $\pi(n) \geq n \log(2)/\log(n)$ pour tout $n \geq 4$.

Exercice 5 Le but de cet exercice est de montrer le premier théorème de Mertens
$$\sum_{p\leq x} \frac{\ln p}{p} = \ln x + O(1).$$
Dans la suite, n désigne un entier strictement positif.

1) Montrer qu'il existe $\vartheta \in [0, 1]$ tel que
$$\ln(n!) = n \ln n - n + 1 + \vartheta \ln n.$$
[*Indication : comparer la somme à une intégrale.*]
2) Montrer que $n \sum_{p\leq n} \Big(\frac{\ln p}{p} - \ln p\Big) < \ln(n!) < n \sum_{p\leq n} \Big(\frac{\ln p}{p} + \frac{\ln p}{p(p-1)}\Big)$.
3) Eu utilisant l'exercice 4, 2), montrer que $\sum_{p\leq n} \frac{\ln p}{p} < \ln n + \ln 4$.
4) Monter que $\sum_{p\leq n} \frac{\ln p}{p(p-1)} \leq \ln 4$.
5) En déduire que $\sum_{p\leq x} \frac{\ln p}{p} > \ln x - 1 - \ln 4$. Conclure.